

Lineare Algebra I

für Informatiker

Carsten, Fabian und Joachim nach Dr. Timo Hanke
auf Basis der Mitschrift vom SS 2007

SS 2008

Vorwort

Dies ist eine inoffizielle Mitschrift zur Vorlesung Lineare Algebra I für Informatiker aus dem SS 2008. Sie ist in keiner Weise von Herrn Dr. Hanke korrekturgelesen worden o.ä. Auch ansonsten kann in keiner Weise die Richtigkeit dieser Aufzeichnungen garantiert werden. Im Gegenteil ist sie aus Zeitmangel an einigen Stellen sehr unvollständig, bzw. manche Stellen fehlen ganz oder werden nur durch die Aufzeichnungen vom letzten Jahr abgedeckt.

Eine Liste der Autoren des letzten Jahres kann unter http://wiki.infostudium.de/wiki/Mitschrift_Hanke_SS07 eingesehen werden.

Bei Fragen, Anregungen, Kritik, Korrekturen o.ä. bitte eine Mail an la2008@khd2.de.

Erläuterungen zur Farbgebung

Normale Schrift

Ergänzungen und Anmerkungen von Herrn Dr. Hanke in der Vorlesung

andere Ergänzungen und Anmerkungen von Herrn Dr. Hanke in der Vorlesung

Aufzeichnungen der Autoren vom SS 2007, die in der Vorlesung 2008 nicht mehr vorkamen, aber an die Stelle passen, bzw. dort standen.

Anmerkungen der aktuellen Autoren zum besseren Verständnis (ohne Gewähr).

Noch nicht bearbeitete Teile aus der Version des Vorjahres. Diese Teile sind außerdem daran zu erkennen, dass sie eine doppelte Nummerierung haben. Eine automatische (von Latex) und eine manuelle (von den Vorjahresautoren).

Inhaltsverzeichnis

Grundlagen	10
§ Abbildungen	11
(0.1) Wiederholung	11
(0.1.1) Beispiele	11
(0.1.2) Eigenschaften von Abbildungen	11
(0.2) Beispiele	12
(0.3) Bemerkung	14
(0.4) Bemerkung zu Surjektivität und Injektivität	15
(0.5) Beispiel	16
(0.6) Bemerkung (Interpretation von g)	16
(0.7) Beispiele	16
(0.8) Satz (Umkehrabbildung einer verketteten Funktion)	17
(0.9) Definition (Gleichheit von Abbildungen, Menge aller Abbildungen zwischen zwei Mengen)	17
(0.10) Beispiel	17
(0.11) Definition + Beispiel	17
§ Körper	19
(0.12) Definition (Körper)	19
(0.13) Beispiele	19
(0.14) Folgerungen (aus Axiomen)	20
(0.15) Bemerkung	21
§ Gruppen und Ringe	22
(0.15.1)(0.16) Definition (Gruppe)	22
(0.15.2)(0.17) Bemerkung	22
(0.15.3)(0.18) Beispiele	22
(0.15.4)(0.19) Definition (Gruppenhomomorphismus)	23
(0.15.5)(0.20) Beispiel	23
(0.15.6)(0.21) Schreibweise	23
(0.15.7)(0.22) Definition (Ring)	24
(0.15.8)(0.23) Beispiele	24
(0.15.9)(0.24) Definition (Einheit)	24
(0.15.10)(0.25) Bemerkung	24
(0.15.11)(0.26) Definition (Ringhomomorphismus)	25
(0.15.12)(0.27) Beispiel	25
§ Das Signum einer Permutation	26
(0.15.13)(0.28) Definition (Transposition)	26

Inhaltsverzeichnis

(0.15.14)(0.29) Satz	26
(0.15.15)(0.30) Definition (Signum)	26
(0.15.16)(0.31) Satz	26
§ Nullstellen von Polynomen	27
(0.16)Definition	28
(0.17)Satz	28
(0.18)Folgerung + Definition	28
I Lineare Gleichungssysteme	30
§1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	31
(1.1) (Definition (Lineares Gleichungssystem)	31
(1.2) Beispiel	31
(1.3)	34
(1.4) Bemerkung	34
(1.5) Definition (Matrizen)	35
(1.7) Beispiele	36
(1.8) Definition (Koeffizientenmatrix)	36
(1.9) Beispiel	37
§2 Der Gauß-Algorithmus	39
(1.0.1) (1.11) Definition (Zeilentransformationen)	39
(1.0.2) (1.12) Beispiel	39
(1.0.3) (1.13) Satz	39
(1.0.4) (1.14) Definition (Zeilenstufenform)	39
(1.0.5) (1.15) Gauß-Algorithmus (Teil I)	40
(1.0.6) (1.16) Beispiel	40
(1.0.7) (1.17) Anwendung	41
(1.0.8) (1.18) Beispiel	41
(1.0.9) (1.19) Bemerkung	41
(1.0.10)(1.20) Anwendung (Lösungsverfahren für inhomogenes LGS)	42
(1.0.11)(1.21) Beispiel	42
(1.0.12)(1.22) Bemerkung	43
(1.0.13)(1.23) Definition (Reduzierte Zeilenstufenform, Normalform)	43
(1.0.14)(1.24) Gauß-Algorithmus II	44
(1.0.15)(1.25) Beispiel	44
§3 Matrix-Arithmetik	46
(1.0.16)(1.27) Definition (Matrix-Arithmetik)	46
(1.0.17)(1.28) Beispiele	46
(1.22)Bemerkung	47
(1.23)Beispiel und Schreibweise	47
(1.24)Definition (für quadratische Matrizen)	48
(1.25)Satz	49
(1.26)Folgerung	49
(1.27)Bemerkung und Beispiele	50

Inhaltsverzeichnis

(1.28)Definition (Lineare Gruppe)	50
(1.29)Beispiel	50
(1.30)Satz: LGS mit regulärer Koeffizientenmatrix	51
(1.31)Beispiel	51
(1.32)Bemerkung	51
§4 Matrixgleichungen und Regularität	52
(1.32)Bemerkung	52
(1.33)Bemerkung	52
(1.34)Beispiel	52
(1.35)Anwendung: Inversenberechnung.	53
(1.36)Bemerkung	53
(1.37)Definition.	53
(1.38)Bemerkung	54
(1.39)Folgerung	54
(1.40)Beispiel	55
(1.41)Satz	55
(1.42)Folgerung	56
(1.43)Folgerung	56
II Vektorräume und lineare Abbildungen	57
§5 Vektorräume	58
(2.0.1) (2.1) Definition (Vektorraum)	58
(2.0.2) (2.2) Folgerungen	58
(2.0.3) (2.3) Beispiele	58
(2.0.4) (2.4) Definition und Bemerkung (Untervektorraum)	59
(2.0.5) (2.5) Beispiele	59
(2.0.6) (2.6) Definition (Linearkombination/Erzeugnis)	59
(2.0.7) (2.7) Beispiele	60
(2.0.8) (2.8) Satz	60
(2.0.9) (2.9) Beispiel und Definition (Spalten-/Zeilenraum)	60
(2.10)Definition (lineare Abbildung/K-Homomorphismus)	61
(2.11)Beispiele	61
(2.12)Definiton (Kern + Bild)	62
(2.13)Bemerkung	62
(2.14)Beispiele (u.a. Lösungsmengen bzgl. Kern/Bild)	63
(2.14.1)(2.15) Satz	63
§6 Basis und Dimension	65
(2.16)Definition (linear un-/abhängig)	65
(2.17)Bemerkung	65
(2.18)Beispiele (Überprüfung auf l.a. bzw. l.u.)	65
(2.19)Satz (Erzeugnisse bzgl. l.a./l.u.)	66
(2.20)Beispiel	66
(2.21)Definition (Erzeugendensystem + Basis)	66
(2.22)Beispiele	67

Inhaltsverzeichnis

(2.23)Satz (Charakterisierung von Basen)	67
(2.24)Folgerung (Basisauswahl)	67
(2.25)Satz	68
(2.26)Folgerung + Definition (Dimension)	68
(2.27)Beispiele:	69
(2.28)Folgerung (endlich dimensionaler VR)	69
(2.29)Beispiel	70
(2.30)Definition (geordnete Basis)	71
(2.31)Bemerkung (Basis und Untervektorräume)	71
(2.32)Satz	71
(2.33)Definition + Beispiel (Koordinatensystem)	72
(2.34)Beispiele	72
(2.35)Satz	72
(2.36)Satz (Eindeutigkeit linearer Abbildungen zwischen Vektorräumen)	73
(2.37)Beispiel zur Eindeutigkeit	73
(2.38) Definition (Rang und Defekt von Matrizen)	74
(2.39)Satz (Dimensionsformel)	74
(2.40)Folgerung (injektiv, surjektiv, bijektiv bei linearen Abbildungen)	75
(2.41)Folgerung	76
§7 Unterräume von K^n und $K^{1 \times m}$	77
(2.42)Definition (Fundamentlräume)	77
(2.43)Satz + Beispiel	77
(2.44)Folgerung (Zusammenhang zwischen Fundamentlräumen)	78
(2.45)Satz	78
(2.46)Folgerung (Zusammenhang von Dimensionen von Fundamentlräumen)	79
(2.47)Beispiel	80
(2.48)Beispiel	80
(2.49)Bemerkung	81
(2.50)Satz	82
(2.51)Hilfsatz	82
(2.52)Satz	84
(2.53)Beispiel Codierungstheorie	84
(2.54)Definition (Codewörter, Generator- und Kontrollmatrix)	85
(2.55)Bemerkung (Fehler)	86
(2.56)Beispiel	86
(2.57)Satz (Fehler)	86
(2.58)Beispiel (Konstruktion von Codes (Hamming-Code))	87
§8 Lineare Abbildungen und Matrizen	89
(2.59)Bemerkung (Basen entsprechen Koordinatensystemen)	89
(2.60)Satz	89
(2.61)Definition (Abbildungsmatrix)	89
(2.61.1)Merkregel zum Aufbau der Abbildungsmatrix ${}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{A}}$ einer linearen Abbildung $\varphi: V \rightarrow W$	90
(2.62)Beispiel	90
(2.63)Bemerkung	91
(2.64)Beispiel	92
(2.65)Folgerung	93

Inhaltsverzeichnis

(2.66) Beispiel	93
(2.67) Folgerung + Definition	93
(2.67.1) Merkregel zum Aufbau der Basiswechselmatrix ${}^{\mathcal{B}}T_{\varphi}^{\mathcal{A}}$	94
(2.68) Beispiel	94
(2.69) Basiswechselmatrix	94
(2.70) Beispiel	94
(2.70.1)(2.67) Bemerkung (Basiswechsel entsprechen Isomorphismen)	97
(2.70.2)(2.68) Folgerung	97
(2.70.3)(2.69) Beispiel	98
§9 Matrix-Inversion und LU-Zerlegung	99
(2.0.4) (2.70) Beispiel	99
(2.0.5) (2.71) Satz	100
(2.0.6) (2.72) Algorithmus (LU/LR-Zerlegung)	100
(2.0.7) (2.73) Beispiel	100
(2.0.8) (2.74) Bemerkung	101
(2.0.9) (2.75) Satz	101
(2.0.10)(2.76) Beispiel	102
III Determinanten und Eigenvektoren	103
§9 Determinanten	105
(3.1) Definition	105
(3.2) Rechenregeln für Determinanten	105
(3.3) Satz (Leibnitz Formel)	107
(3.4) Beispiel	107
(3.5) Laplace-Entwicklung + Beispiel	109
(3.6) Folgerung ($\det = 0$ / $\det \neq 0$)	110
(3.7) Definition (ähnlich)	110
(3.8) Satz (Cramer'sche Regel und Adjunktenformel)	110
(3.9) Beispiel	111
(3.10) Definition (charakteristisches Polynom)	112
(3.11) Beispiel	112
(3.12) Bemerkung	112
(3.13) Satz	112
(3.14) Beispiel + Definition	113
§10 Eigenwerte und Eigenvektoren	117
(3.14) Definition (Eigenwert, -raum, -vektor)	117
(3.15) Bemerkung	118
(3.16) Satz	118
(3.17) Definition	119
(3.18) Beispiel:	119
(3.19) Definition + Bemerkung	120
(3.20) Satz + Definition	121
(3.21) Beispiel	122
(3.22) Satz	123

Inhaltsverzeichnis

(3.23)Definition	124
(3.24)Folgerung	124
(3.25)Beispiel	125
(3.26)Satz	125
(3.27)Folgerung:	126
(3.28)Beispiel	126
(3.29)Beispiel:	126
(3.30)Beispiel	127
(3.31)Definition + Bemerkung (Begleitmatrix)	128
Page Rank „Google-Algorithmus“	129
(3.32)Definition + Satz	130
§11 Invariante Unterräume	132
(3.34)Definition	132
(3.35)Beispiele	132
(3.36)Bemerkung	132
(3.37)Satz	133
(3.38)Beispiel	134
(3.39)Satz	135
(3.40)Bemerkung	136
(3.41)Beispiel	136
(3.42)Folgerung (Satz von Cayley-Hamilton)	137
(3.42.1)(3.46) Beispiel (Matrix-Inverses mit Cayley-Hamilton)	138
(3.42.2)(3.47) Beispiel (Fibonacci)	139
IV Euklidische Vektorräume	140
§12 Euklidische VR	142
(4.1) Definition (Skalarprodukt)	142
(4.2) Beispiel	142
(4.3) Eigenschaften des Skalarproduktes	143
(4.4) Definition (Winkel)	144
(4.5) Beispiel	145
(4.6) Anwendung (Vektorraum basierte Suche)	146
(4.7) Definition (Gram-Matrix)	147
(4.8) Beispiel	147
(4.9) Bemerkung + Definition (Eigenschaften der Gram-Matrix)	147
(4.10)Beispiel	148
(4.11)Satz (Basiswechselsatz für Gram-Matrizen)	148
§13 Orthogonalität	149
(4.12)Definition	149
(4.13)Beispiel (Normalenform der Ebene)	149
(4.14)Bemerkung + Beispiel	149
(4.15)Bemerkung (Projektion)	150
(4.16)Definition	150
(4.17)Bemerkung (zu Orthogonal(/-normal)Basen)	151

Inhaltsverzeichnis

(4.18) Beispiel	151
(4.19) Bemerkung	152
(4.20) Satz + Definition (allgemeine Orthogonalprojektion)	152
(4.21) Beispiel	153
(4.22) Algorithmus (Gram-Schmidt)	154
(4.23) Anwendung (der Projektion)	154
(4.24) Beispiel + Satz	155
(4.25) Folgerung	155
(4.25.1)(4.15) Folgerung	156
(4.25.2)(4.16) Definition + Bemerkung	156
(4.25.3)(4.17) Beispiel	157
§14 Orthogonale Endomorphismen	158
(4.0.4) (4.18) Definition + Beispiel	158
(4.0.5) (4.19) Bemerkung	158
(4.0.6) (4.20) Satz	159
(4.0.7) (4.20) Definition + Bemerkung	159
(4.0.8) (4.21) Beispiel	160
(4.0.9) (4.22) Bemerkung + Definition	161
(4.0.10)(4.23) Satz	161
(4.0.11)(4.24) Beispiel	164
§15 Symmetrische reelle Matrizen	166
(4.0.12)(4.25) Bemerkung	166
(4.0.13)(4.26) Satz	166
(4.0.14)(4.27) Spektralsatz	167

Teil

Grundlagen

§ Abbildungen

(0.1) Wiederholung

Seien M, N Mengen. Eine **Abbildung f von M nach N** ordnet jedem $x \in M$ ein Element $f(x) \in N$ zu, geschrieben:

$$f : M \rightarrow N, x \mapsto f(x)$$

N und M immer mit angeben!

- M Definitionsbereich
- N Wertemenge (Bildbereich)
- $f(x) \in N$ ist das **Bild** von $x \in M$
- $x \in M$ heißt ein **Urbild** von $y = f(x) \in N$ (evtl. gibt es mehrere)

(0.1.1) Beispiele

a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, i \mapsto i^2$

Eine Abbildung mit Def. Bereich \mathbb{N} heißt **Folge**, geschrieben a_1, a_2, \dots, a_n mit $a_i = f(i)$

b) Die Addition in \mathbb{Z} ist die Abbildung

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \mapsto a + b \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

c) Sei M eine Menge

$$\text{id}_M : M \rightarrow M, x \mapsto x \text{ heißt } \mathbf{Identit\ddot{a}t} \text{ von } M.$$

d) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\underline{n} := \{1, 2, \dots, n\}$

$$\text{zB. } \underline{3} = \{1, 2, 3\}$$

$$f : \underline{3} \rightarrow \mathbb{R}, f(1) = 0, f(2) = \sqrt{3}, f(3) = -\frac{1}{2}$$

Eine Abbildung mit Def. Bereich \underline{n} heißt **n-Tupel**, geschrieben

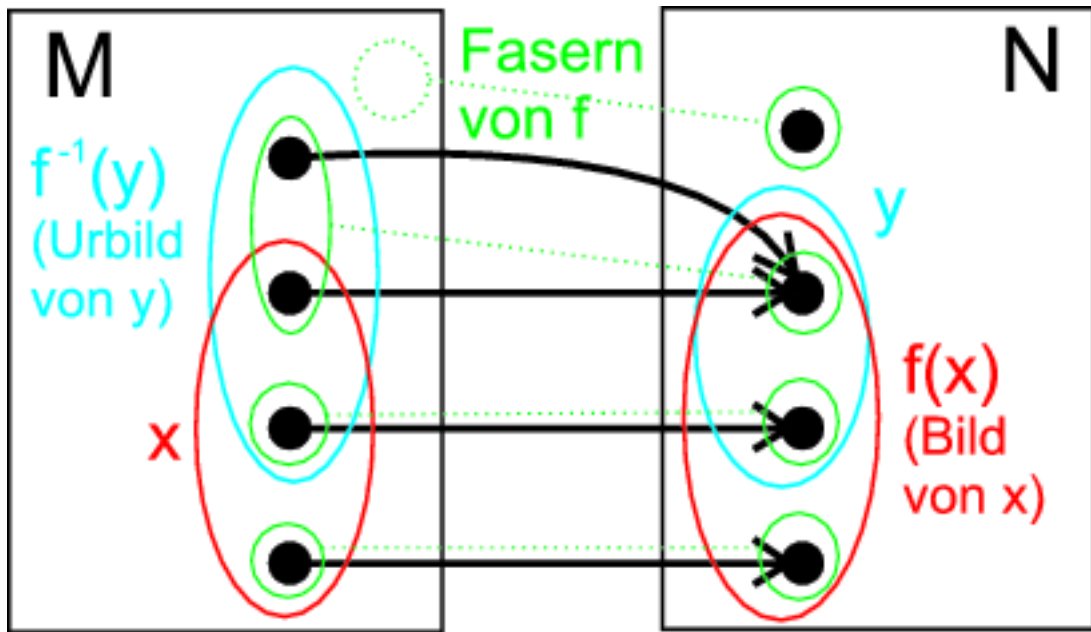
$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ mit } a_i = f(i), \text{ also hier: } (0, \sqrt{3}, -\frac{1}{2})$$

Ein 2-Tupel heißt auch **Paar**, ein 3-Tupel heißt auch **Tripel**

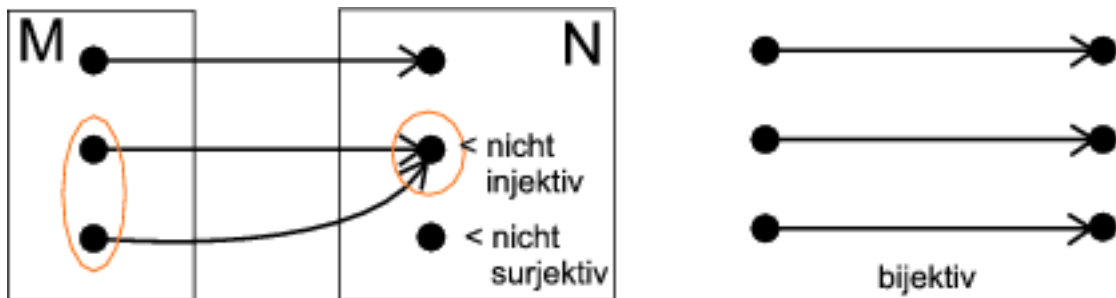
(0.1.2) Eigenschaften von Abbildungen

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung, sei $X \subset M, Y \subset N$

1. $f(X) := \{f(x) | x \in X\} \subseteq N$ heißt **Bild** von X .
2. $f^{-1}(Y) := \{x \in M | f(x) \in Y\} \subseteq M$ heißt das **Urbild** von Y .
3. Die Mengen $f^{-1}(\{y\}) \subseteq M$ heißen **Fasern** von f zu $y \in N$.



4. f heißt **surjektiv**, wenn $f(M) = N$
5. f heißt **injektiv**, wenn $\forall x, x' \in M : \text{wenn } x \neq x' \text{ dann } f(x) \neq f(x')$
6. f heißt **bijektiv**, wenn f surjektiv und injektiv.

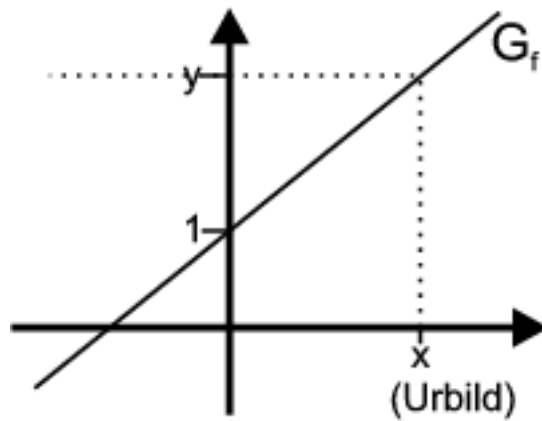


7. Die Teilmenge von $M \times N : G_f := \{(x, y) | x \in M, y = f(x)\}$ heißt **Graph** von f

(0.2) Beispiele

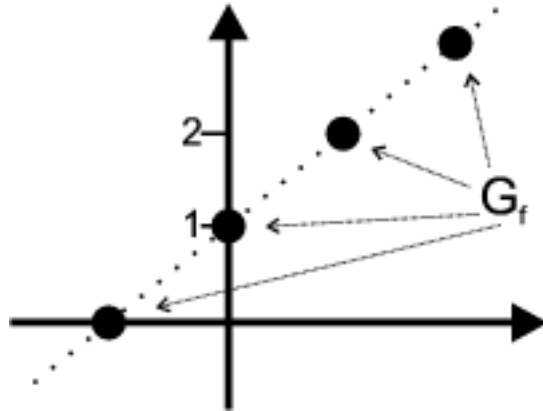
- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$

Inhaltsverzeichnis



$G_f := \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}; \quad f \text{ bijektiv.}$

b) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x + 1$

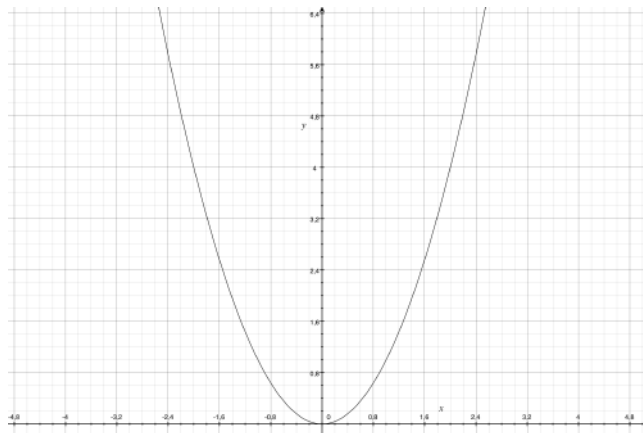


injektiv, nicht surjektiv.

Bemerkung:

Die geeignete Einschränkung von Definitions- bzw. Wertebereich macht jede Abbildung surjektiv bzw. injektiv.

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$



Fasern von f

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\} & \text{falls } y \geq 0 \\ \{\} & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ surjektiv,

$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ injektiv,

$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ bijektiv

$$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$$

d) Hashfunktion/Checksumme/Fingerprint

$\text{md5} : \{\text{Texte}\} \rightarrow \frac{2^{128}}{\text{Menge mit } 2^{128} \text{ Elementen}} \quad 128 \text{ Bit Hashwert.}$

- nicht injektiv
- sollte surjektiv sein
- sollte „gleich große“ Fasern haben (das macht eine gute Hashfunktion aus).

e) Verschlüsselung

z.B. $\text{crypt} : \frac{2^k}{\text{Text der Länge } k\text{-Bit}} \rightarrow \frac{2^k}{\text{Text der Länge } k\text{-Bit}}$ muss bijektiv sein.

- muss injektiv sein (sonst keine Entschlüsselung möglich).
- \Rightarrow muss bijektiv sein, da Definitionsmenge und Wertemenge gleich groß sind.
- \Rightarrow die Umkehrabbildung ist „decrypt“.

z.B. $\text{crypt} :$

$\mathbb{Z}_8 \rightarrow \mathbb{Z}_8$ (hier $k = 3$, aber nimm \mathbb{Z}_8 statt \mathbb{Z}_8)

$x \mapsto 3 \cdot x$

bijektiv?

Gegeben: $y \in \mathbb{Z}_8$, löse $\text{crypt}(x) = y$.

$\text{ggT}(3, 8) = 1$, also 3 invertierbar in \mathbb{Z}_8 , also $3x = y$ eindeutig lösbar, also crypt bijektiv.

Lösung:

$$3^{-1} = \frac{1}{3} = \frac{1+8}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\text{crypt}(x) = 3x = y$$

$$x = 9x = 3y$$

$x := 3y$ ist eindeutige Lösung von $\text{crypt}(x) = y$.

(0.3) Bemerkung

Sei $f : M \rightarrow N$ mit M, N endlich.

a) $|f(M)| \leq |M|$

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- f ist injektiv
- $|f(M)| = |M| (\Leftrightarrow |M| \leq |N|)$
- Sind $x, x' \in M$ mit $f(x) = f(x')$ dann $x = x'$
- jede Faser von f hat höchstens ein Element
- $\forall y \in N$ hat die Gleichung $f(x) = y$ höchstens eine Lösung für $x \in M$

c) Ebenso äquivalent

- i) f ist surjektiv
- ii) $|f(M)| = |N| (\Rightarrow |N| \leq |M|)$
- iii) Jede Faser von f ist nicht leer
- iv) $\forall y \in N$ hat die Gleichung $f(x) = y$ mindestens eine Lösung

d) Ausserdem äquivalent

- i) f ist bijektiv
- ii) $|f(M)| = |M| = |N| (\Rightarrow |N| = |M|)$
- iii) Jede Faser von f hat genau ein Element
- iv) $\forall y \in N$ hat die Gleichung $f(x) = y$ genau eine Lösung

e) f injektiv $\wedge |M| = |N| \Rightarrow f$ bijektiv.

Beweis:

$$f \text{ injektiv} \xrightarrow{b)} |f(M)| = |M| \Rightarrow |f(M)| = |N| \xrightarrow{c)} f \text{ surjektiv} \xrightarrow{f \text{ injektiv}} f \text{ bijektiv.}$$

f) f surjektiv $\wedge |M| = |N| \Rightarrow f$ bijektiv.

$$\text{Ist } f \left\{ \begin{array}{l} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{array} \right\} \text{ dann } \varphi \left\{ \begin{array}{l} |M| \leq |N| \\ |M| \geq |N| \\ |M| = |N| \end{array} \right\}$$

(0.4) Bemerkung zu Surjektivität und Injektivität

Sei $f : M \rightarrow N, M \neq \emptyset$

a) f injektiv \Leftrightarrow es existiert $g : N \rightarrow M$ mit $g \circ f = \text{id}_M$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad M \xrightleftharpoons[g]{f} N$$

b) f surjektiv \Leftrightarrow es existiert $g : N \rightarrow M$ mit $f \circ g = \text{id}_N$.

Beweis:

a) „ \Rightarrow “ Sei f injektiv. Wähle $x_0 \in M$ beliebig ($M \neq \emptyset$) und definiere

$$g : N \rightarrow M, y \mapsto g(y) = \begin{cases} x & y = f(x) \\ x_0 & y \notin f(M) \end{cases}$$

Dann gilt für alle $x \in M : (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$

Also: $g \circ f = \text{id}_M$

„ \Leftarrow “ Sei $g : N \rightarrow M$ mit $g \circ f = \text{id}_M$.

Wir zeigen: $\forall x, x' \in M : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (d.h. f injektiv).

Seien $x, x' \in M$ beliebig.

$$f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow x = x'.$$

Also ist f injektiv. □

(0.5) Beispiel

- a) $f: \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Q}, a \mapsto a$
 $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{Z}}$: z.B. $g(x) = \lfloor x \rfloor$ oder $g(x) = \lceil x \rceil$
 $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{Q}}$: nicht möglich, da f nicht surjektiv.
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto |x|$
 $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$: nicht möglich, da f nicht injektiv
 $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}}$: z.B. $g(x) = x$ oder $g(x) = -x$

(0.6) Bemerkung (Interpretation von g)

Sei $M \xrightleftharpoons[g]{f} N$, $f(x) = c, c \in N$

- a) Wenn $g \circ f = \text{id}_M$ (also f injektiv), dann gilt:
 für jedes $c \in f(M)$ ist $g(c)$ die eindeutige Lösung von $f(x) = c$
- b) Wenn $f \circ g = \text{id}_N$ (also f surjektiv), dann gilt:
 für jedes $c \in N$ ist $g(c)$ eine der Lösungen von $f(x) = c$.
- c) g heißt *Umkehrabbildung* von f , geschrieben $g = f^{-1}$, wenn $g \circ f = \text{id}_M$ **und** $f \circ g = \text{id}_N$.
 f^{-1} existiert $\Leftrightarrow f$ bijektiv.

Warnung: $\underbrace{f^{-1}(x)}_{\in M} \neq \underbrace{f(x)^{-1}}_{\in N} = \frac{1}{f(x)}$

(0.7) Beispiele

- a) $c: \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, x \mapsto \bar{3} \cdot x$.
 $c \circ c: \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, x \mapsto \bar{3} \cdot (\bar{3} \cdot x) = (\bar{3} \cdot \bar{3}) \cdot x = \bar{9} \cdot x = \bar{1} \cdot x = x$
 $\Rightarrow c \circ c = \text{id}_{\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}} \stackrel{(0.4)}{\Rightarrow} c$ bijektiv mit $c^{-1} = c$.
- b) Sei $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$
 Ist $\text{ggT}(a, n) = 1$ dann ist die Abbildung $m_a: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x \mapsto \bar{a} \cdot x$ bijektiv

Erklärung + Umkehrabbildung

$$\text{ggT}(a, n) = 1 \stackrel{\text{DS(4.30)}}{\Leftrightarrow} \bar{a} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \quad \text{Einheitengruppe von } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \stackrel{(\text{Def. Einheit})}{\Leftrightarrow} \exists \bar{s} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \bar{s} \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{s} = \bar{1}$$

$$\bar{s} \cdot \bar{a} = 1 \Rightarrow m_{\bar{s}} \circ m_{\bar{a}}: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x \mapsto \bar{s} \cdot (\bar{a} \cdot x) = (\bar{s} \cdot \bar{a}) \cdot x = \bar{1} \cdot x = x$$

$$\Rightarrow m_{\bar{s}} \circ m_{\bar{a}} = \text{id}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}.$$

$$\text{ebenso: } m_{\bar{a}} \circ m_{\bar{s}} = \text{id}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$$

$$\text{Also ist } m_a \text{ bijektiv mit } (m_a)^{-1} = m_s.$$

s findet man mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus. $s \in \mathbb{Z}$ ist nicht eindeutig, aber $\bar{s} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist eindeutig.

c) $m_3 : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, x \mapsto \bar{3} \cdot x$ ist

- nicht injektiv: $m_3(\bar{0}) = \bar{0}, \quad m_3(\bar{2}) = \bar{0}$
- nicht surjektiv: $\bar{1} \notin m_3(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$

d) $f, g : \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}, f(x) = x + \bar{3}, g(x) = \bar{7} \cdot x$
 $(f \circ g)(x) = f(\bar{7} \cdot x) = \bar{7}x + \bar{3}$
 $f^{-1}(x) = x - \bar{3}$
 $g^{-1}(x) = \bar{8} \cdot x$ **Inverses von $\bar{7}$? Raten: $\bar{7} \cdot \bar{8} = \overline{56} = \bar{1}$**
 $\Rightarrow f \circ g$ bijektiv und $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
 Also: $(f \circ g)^{-1}(x) = \bar{8} \cdot (x - \bar{3}) = \bar{8} \cdot x - \overline{24} = \bar{8} \cdot x - \bar{2}.$

(0.8) Satz (Umkehrabbildung einer verketteten Funktion)

$$M \xrightarrow[g^{-1}]{g} N \xrightarrow[f^{-1}]{f} L$$

f, g bijektiv $\Rightarrow f \circ g$ bijektiv und $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$

(0.9) Definition (Gleichheit von Abbildungen, Menge aller Abbildungen zwischen zwei Mengen)

a) Seien $f : M \rightarrow N, g : M' \rightarrow N'.$

f und g heißen **gleich** (geschrieben $f = g$) wenn:

- $M = M'$
- $N = N'$
- $\forall x \in M = M' : f(x) = g(x)$

b) Die Menge aller Abbildungen $M \rightarrow N$ wird mit N^M bezeichnet.

(0.10) Beispiel

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2}$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto |x|$

Dann ist $f = g \neq h.$

b) $\underline{2}^{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N} \rightarrow \underline{2}\} =$ Menge aller Binärfolgen.

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} =$ Menge aller reellen Funktionen.

$\underline{m}^n = \{\underline{n} \rightarrow \underline{m}\} \quad \# = m^n$

(0.11) Definition + Beispiel

Sei $f : M \rightarrow N$ und $M' \subseteq M.$ Die Abbildung

$$f|_{M'} : M' \rightarrow N, x \mapsto f(x)$$

Inhaltsverzeichnis

heißt **Einschränkung** von f auf M' .

z.B. ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ nicht injektiv, aber $f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ und $f|_{\mathbb{R}_{\leq 0}}$ sind beide injektiv.

§ Körper

(0.12) Definition (Körper)

Eine Menge K heißt **Körper**, wenn zwei Abbildungen

$$+ : K \times K \rightarrow K, (a, b) \mapsto a + b$$

$$* : K \times K \rightarrow K, (a, b) \mapsto a * b$$

definiert sind, für die gelten:

$$(A1) \quad a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in K$$

$$(A2) \quad \exists 0 \in K \text{ mit } a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in K$$

$$(A3) \quad \forall a \in K \text{ gibt es } -a \in K \text{ mit } a + (-a) = (-a) + a = 0$$

$$(A4) \quad a + b = b + a \quad \forall a, b \in K$$

$$(A5) \quad a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in K$$

$$(A6) \quad \exists 1 \in K, 1 \neq 0 \text{ mit } 1 * a = a * 1 = a \quad \forall a \in K$$

$$(A7) \quad \forall a \in K, a \neq 0 \text{ gibt es } a^{-1} \in K \text{ mit } a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$$

$$(A8) \quad a * b = b * a \quad \forall a, b \in K$$

$$(A9) \quad a * (b + c) = a * b + a * c \text{ und } (a + b) * c = a * c + b * c \quad \forall a, b, c \in K$$

(0.13) Beispiele

- a) $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ sind Körper (mit den üblichen Abbildungen $+$ und \cdot)
- b) \mathbb{Z} ist kein Körper (A7 ist nicht gegeben)
 \mathbb{Z} ist kommutativer Ring. **Erinnerung: Ring mit $1 \neq 0$ bedeutet: (A1)-(A6), (A9).**
kommutativer Ring $1 \neq 0$: (A1) - (A6), (A8), (A9)
- c) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ kommutativer Ring
- d) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist Körper $\Leftrightarrow n \in \mathbb{P}$ (vgl. DS 4.31)
Wir schreiben $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, p \in \mathbb{P}$ (\mathbb{F} für field = Körper)
- e) Der Polynomring $K[x]$ über K (beliebiger Körper) ist ein kommutativer Ring, aber **kein** Körper.
- f) 2 Beispiele (wichtig!) für nicht-kommutative Ringe kommen später.
- g) $\{0\}$ = der triviale Ring, kein Körper.

h) $\{0, 1\}$ mit den Abbildungen $+, *$ definiert durch die Verknüpfungstabellen:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

XOR

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

AND

ist ein Körper.

Dieser Körper heißt \mathbb{F}_2 .

i) $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, a, b\}$ mit den Verknüpfungstabellen:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$*$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

ist ein Körper, der **einzige** mit 4 Elementen. (vgl. z.B. Beutelspacher, § 2.2, S. 37-38, leicht lesbar)

Auslassung: Nichts großartig aufregendes

(0.14) Folgerungen (aus Axiomen)

(A2') \exists **genau eine** $0 \in K$ mit $a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in K$

(A3') $\forall a \in K$ gibt es **genau ein** $-a \in K$ mit $a + (-a) = (-a) + a = 0$

(B1) $\forall a \in K : a + a = a \Rightarrow a = 0$

(B2) $\forall a \in K : 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

(B3) $a, b \in K$ mit $a * b = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$

(B4) $\forall a, b \in K : a * (-b) = (-a) * b = -(a * b)$

Beweis:

(A') Seien $0, 0' \in K$ mit $a + 0 = 0 + a = a$ und $a + 0 = 0' + a = a \quad \forall a \in K$

Dann folgt: $0 \stackrel{\text{Vor.}}{=} 0 + 0' \stackrel{\text{Vor.}}{=} 0'$

(A3') Seien $a, b, b' \in K$ mit $a + b = b + a = 0$ und $a + b = b' + a = 0$

Dann folgt: $b \stackrel{\text{A2}}{=} 0 + b \stackrel{\text{Vor.}}{=} (b' + a) + b \stackrel{\text{A1}}{=} b' + (a + b) \stackrel{\text{Vor.}}{=} b' + 0 \stackrel{\text{A2}}{=} b'$

Seien im Folgenden $a, b \in K$ beliebig.

(B1) Aus $a + a = a$ folgt: $a \stackrel{\text{A2}}{=} a + 0 \stackrel{\text{A3}}{=} a + (a + (-a)) \stackrel{\text{A1}}{=} (a + a) + (-a) \stackrel{\text{Vor.}}{=} a + (-a) \stackrel{\text{A3}}{=} 0$

(B2) $0 \cdot a \stackrel{\text{A2}}{=} (0 + 0) \cdot a \stackrel{\text{A9}}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Nach (B1) folgt $0 \cdot a = 0$

(B3) Wir zeigen: Aus $a \cdot b = 0$ und $b \neq 0$ folgt $a = 0$.

$a \cdot b = 0, b \neq 0 \Rightarrow a \stackrel{\text{A6}}{=} a \cdot 1 \stackrel{\text{A7}}{=} a \cdot (b \cdot b^{-1}) \stackrel{\text{A5}}{=} (a \cdot b) \cdot b^{-1} \stackrel{\text{B2}}{=} 0$

(B4) als Übung.

(0.15) Bemerkung

Sei K Körper. Für $a, b \in K$ schreiben wir kurz

$$a \cdot b + c \quad \text{für} \quad (a \cdot b) + c \quad \cdot \text{ bindet stärker als } +$$

$$a + b \cdot c \quad \text{für} \quad a + (b \cdot c) \quad \cdot \text{ bindet stärker als } +$$

$$a - b \quad \text{für} \quad a + (-b)$$

$$ab \quad \text{für} \quad a \cdot b$$

$$a^n \quad \text{für} \quad \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}, n \in \mathbb{N}$$

$$a/b \text{ bzw. } \frac{a}{b} \quad \text{für} \quad a \cdot (b^{-1})$$

§ Gruppen und Ringe

(0.15.1) (0.16) Definition (Gruppe)

Sei G eine Menge und $*$: $G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto a * b$ eine Abbildung, genannt **Verknüpfung** oder **Operation**.

$(G, *)$ (oder kurz G) heißt **Gruppe**, wenn gilt:

$$(G1) (x * y) * z = x * (y * z) \forall x, y, z \in G$$

$$(G2) \exists e \in G : e * x = x = x * e \forall x \in G$$

$$(G3) \forall x \in G : \exists x' \in G : x * x' = e = x' * x$$

$(G, *)$ heißt **abelsche Gruppe**, wenn zusätzlich gilt:

$$(G4) x * y = y * x \forall x, y \in G$$

e heißt **neutrales Element** von G

x' in (G3) heißt **inverses Element** von x

(0.15.2) (0.17) Bemerkung

- i) In der Regel schreiben wir G „multiplikativ“ dh. \cdot für $*$, 1 für e , x^{-1} für x'
- ii) Neutrales Element und Inverses sind jeweils eindeutig
- iii) Wenn G abelsch ist, schreiben wir G meistens „additiv“, dh. $+$ für $*$, 0 für e , $-x$ für x'
- iv) Wegen (G1) lassen wir Klammern häufig weg zB. $x * y * z = (x * y) * z = x * (y * z)$

(0.15.3) (0.18) Beispiele

a) $(\mathbb{Z}, +)$ abelsche Gruppe, $(\mathbb{Z}_n, +)$ abelsche Gruppe

b) K Körper

$(K, +)$ abelsche Gruppe „additive Gruppe von K “

$(K \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppe „multiplikative Gruppe von K “

c) M Menge

$$S_M := \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ ist bijektiv}\}$$

(S_M, \circ) ist Gruppe, wobei \circ = Komposition von Abbildung

$$(G1) (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \text{ also } (f \circ g) \circ h(x) = f(g(h(x))) = f \circ (g \circ h(x))$$

$$(G2) e = \text{id}_M$$

$$(G3) f^{-1} = \text{Umkehrabbildung (vgl. Bsp. (0.9))}$$

d) $n \in \mathbb{N}, M = \underline{n}$

$S_n := S_M = S_{\underline{n}}$ heißt **symmetrische Gruppe** und ihre Elemente Permutationen

$$|S_n| = n!$$

e) Sei (G, \cdot) Gruppe $n \in \mathbb{N}$

Betrachte $G^n := \underbrace{G \times G \times \dots \times G}_{n\text{-mal}} = \{(a_1 \dots a_n) \mid a_i \in G\}$

mit „komponentenweiser“ Verknüpfung, d.h.

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) := (a_1 \cdot b_1, \dots, a_n \cdot b_n)$$

(G^n, \cdot) ist Gruppe und ist G abelsch, dann auch G^n

f) M Menge. Betrachte: $M^G := \{f : M \rightarrow G\}$

mit der Verknüpfung $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$

(M^G, \cdot) ist Gruppe

(0.15.4) (0.19) Definition (Gruppenhomomorphismus)

Seien G, H Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : G \rightarrow H$ heißt **Gruppenhomomorphismus** wenn

$$\varphi(\underbrace{x \cdot y}_{\text{in } G}) = \underbrace{\varphi(x) \cdot \varphi(y)}_{\text{in } H} \quad \forall x, y \in G$$

Ein Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ heißt

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Monomorphismus} \\ \text{Epimorphismus} \\ \text{Isomorphismus} \end{array} \right\} \text{ wenn } \varphi \left\{ \begin{array}{l} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{array} \right\}$$

Existiert ein Isomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ dann heißen G und H isomorph, geschrieben $G \cong H$

(0.15.5) (0.20) Beispiel

a) $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +), x \mapsto x$ ist Monomorphismus

b) $\exp : (\mathbb{R}, +) \mapsto (\mathbb{R}_{>0}, \cdot), x \mapsto e^x$

$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ ist Epimorphismus

(0.15.6) (0.21) Schreibweise

Sei $(A, +)$ abelsche Gruppe, $a \in A$ sowie $U, V \subseteq A$

$$a + U := \{a + u \mid u \in U\} \subseteq A$$

$$U + V := \{u + v \mid u \in U, v \in V\} \subseteq A$$

Beispiele

a) $A = (K^n, +), \quad U = \mathbb{L}_0 \subseteq A$

$$\mathbb{L} = S + \mathbb{L}_0$$

b) $A = \mathbb{Z}, \quad U = 7 \cdot \mathbb{Z}, \quad 1 + U = \{\dots, 1, 8, 15, \dots\}$

(0.15.7) (0.22) Definition (Ring)

Sei R eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+: R \times R \rightarrow R$ und $\cdot: R \times R \rightarrow R$

$(R, +, \cdot)$ heißt **Ring** (oder kurz R), wenn gilt:

(R1) $(R, +)$ ist abelsche Gruppe

(R2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in R$

(R3) $\exists 1 \in R$ mit $1 \cdot x = x = x \cdot 1 \quad \forall x \in R$

(R4) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ und $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \forall x, y \in R$

R heißt kommutativ wenn zusätzlich gilt

(R5) $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in R$

(0.15.8) (0.23) Beispiele

- a) \mathbb{Z} , alle \mathbb{Z}_n und alle Körper sind auch kommutative Ringe
- b) $R = \{0\}$ ist kommutativer Ring (Trivialring), Achtung: $1 = 0$
- c) Vom kommutativen Ring zum Körper fehlen (A7) und $1 \neq 0$
- d) $n\mathbb{Z}$ ist kein Ring, denn es existiert keine 1 (ausser bei $n = 1$)

(0.15.9) (0.24) Definition (Einheit)

Sei R ein Ring und $x \in R$. x heißt **invertierbar** oder **Einheit**, wenn es $x' \in R$ mit

$$x \cdot x' = 1 = x' \cdot x \text{ gibt}$$

Bemerkung: Falls existent ist x' eindeutig und heißt Inverses bzw. inverses Element von x , geschrieben x^{-1}

$R^* :=$ Menge aller Einheiten von R

(0.15.10) (0.25) Bemerkung

- i) $1 \in R^*$
- ii) Ist $x \in R^*$, dann $x^{-1} \in R^*$
- iii) $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$
- iv) (R^*, \cdot) ist Gruppe (Einheitengruppe)

Beweis:

Seien $x, y \in R$, zu zeigen: $x \cdot y \in R^*$. Es gibt $x^{-1}, y^{-1} \in R^*$

$$(x \cdot y)(y^{-1} \cdot x^{-1}) \in R^* = x \cdot 1 \cdot x^{-1} = 1$$

Also $x \cdot y \in R^*$

Axiome: (G1): von R , (G2): nach a), (G3): nach b)

- v) R kommutativer Ring

$$R \text{ Körper} \Leftrightarrow R^* = R \setminus \{0\}$$

Beweis:

$$(A7) \Leftrightarrow R^* \supseteq R \setminus \{0\}$$

$$1 \neq 0 \Leftrightarrow 0 \in R^*$$

vi) Sei $a \in \mathbb{Z}_n = (0, 1, \dots, n-1)$

$$a \in \mathbb{Z}_n^* \Leftrightarrow \text{ggT}(a, n) = 1$$

Auslassung: Beweis..

vii) \mathbb{Z}_n Körper $\Leftrightarrow n$ Primzahl

Beweis: f), e)

(0.15.11) (0.26) Definition (Ringhomomorphismus)

Seien R, S Ringe. Eine Abbildung $\varphi : R \rightarrow S$ heißt (Ring-)Homomorphismus, wenn gelten:

1. φ ist Gruppenhomomorphismus $(R, +) \rightarrow (S, +)$
2. $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \quad \forall x, y \in R$
3. $\varphi(1) = 1$

(0.15.12) (0.27) Beispiel

a) Die Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n, a \mapsto a \bmod n$

b) Die Abbildung $m_a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto a \cdot x$

ist kein Ringhomomorphismus ($m_a(1) = a \neq 1$) (ausser $a = 1$)

§ Das Signum einer Permutation

$$S_n = \{\pi : \underline{n} \rightarrow \underline{n} \mid \pi \text{ bijektiv}\} \quad \underline{n} := \{1, \dots, n\}$$

$\pi \in S_n$ heißen **Permutationen**, geschrieben,

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

(S_n, \circ) ist Gruppe (vgl. Bsp.(0.18))

(0.15.13) (0.28) Definition (Transposition)

$\tau \in S_n$ heißt **Transposition**, wenn es $1 \leq i \neq j \leq n$ gibt mit $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, $\tau(k) = k \forall k \neq i, j$. Wir schreiben dann $\tau = (i, j)$

Beispiel: $n=5$

$$(2\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: $\tau = \text{id}_n$

(0.15.14) (0.29) Satz

Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben. Die Anzahl der Transpositionen ist dabei nicht eindeutig, aber ist (für festes π) stets gerade oder stets ungerade.

(0.15.15) (0.30) Definition (Signum)

$\text{sgn } \pi := (-1)^{|\#\text{Transpositionen in } \pi|}$ heißt **Signum von $\pi \in S_n$** . π heißt gerade bzw. ungerade wenn $\text{sgn} = 1$ bzw. $\text{sgn} = -1$ ist.

Beispiel

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 5)(1\ 3)(3\ 4)$$

$$\Rightarrow \text{sgn } \pi = -1 \text{ (ungerade)} \quad (\tau \text{ Transposition} \Leftrightarrow \text{sgn} = -1)$$

(0.15.16) (0.31) Satz

1. $\text{sgn}(\pi \circ \pi') = \text{sgn}(\pi) \cdot \text{sgn}(\pi')$
2. $\text{sgn}(\pi^{-1}) = \text{sgn}(\pi)$

Beispiel

Inhaltsverzeichnis

a) $\pi = (2\ 5)(1\ 3)(3\ 4)$

b) $\pi^{-1} = (3\ 4)^{-1}(1\ 3)^{-1}(2\ 5)^{-1} = ((3\ 4)(1\ 3)(2\ 5))^{-1}$

§ Nullstellen von Polynomen

Für die nächsten drei Punkte stimmt die Nummerierung nicht: Das sind die, die Herr HAnke in der Vorlesung mit $\omega + x$ bezeichnet hat.

(0.16) Definition

Sei $f = a_n \cdot x^n + \dots + a_0 \in K[x]$.

$a \in K$ heißt **Nullstelle**, wenn $f(a) = a_n \cdot a^n + \dots + a_1 \cdot a + a_0 = 0$.

(0.17) Satz

$0 \neq f \in K[x]$, a Nullstelle von f .

a) Es gibt eindeutiges $g \in K[x]$ mit

$$f = (x - a) \cdot g \quad (\Rightarrow x - a | f) \quad | \text{ bedeutet „teilt“ }$$

b) Es gibt eindeutige $m \in \mathbb{N}$ und $g \in K[x]$ mit $f = (x - a)^m \cdot g$ und $g(a) \neq 0$.

Beweis:

a) (DS, Satz 445) Division mit Rest in $K[x]$.

Es gibt eindeutige $q, r \in K[x]$ mit $f = (x - a) \cdot q + r$ und $\deg r < \deg(x - a) = 1$
 $\Rightarrow r$ konstant $\Rightarrow r = r_0$ für ein $r_0 \in K$.

Einsetzen von a liefert:

$$0 = f(a) = ((x - a) \cdot q + r)(a) \stackrel{\tau_a \text{ Homom.}}{=} \underbrace{(a - a)}_{=0} + q(a) + \underbrace{r(a)}_{=r_0} = r_0.$$

Also $r = 0$, also $f = (x - a) \cdot q$.

b) Induktion nach $\deg f$ mit a).

(0.18) Folgerung + Definition

Sei $f \in K[x]$, seien a_1, \dots, a_l die verschiedenen Nullstellen von f (alle Nullstellen).

Definition Das m aus $f = (x - a)^m \cdot g$ (siehe Satz oben) heißt **Vielfachheit** der Nullstelle a .
Vielfachheit n_1, \dots, n_l .

a) Es gibt $g \in K[x]$ mit $f = (x - a_1)^{n_1} \cdots (x - a_l)^{n_l} \cdot g$ und g hat keine Nullstellen.

$$\text{b) } \sum_{i=1}^l n_i \leq \deg f$$

Inhaltsverzeichnis

c) $l \leq \deg f$, d.h. es gibt höchstens $\deg f$ Nullstellen.

Man sagt „ f zerfällt vollständig in Linearfaktoren“, wenn g in a) konstant ist, bzw. wenn in b) gilt $\sum_{i=1}^l n_i = \deg f$.

Fundamentalsatz Jedes Polynom über \mathbb{C} zerfällt vollständig in Linearfaktoren.

Teil I

Lineare Gleichungssysteme

§1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

(1.1) (Definition (Lineares Gleichungssystem))

Ein lineares Gleichungssystem (über \mathbb{R}), kurz LGS, hat die Form

$$(*) \left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ (die Koeffizienten des LGS)

Das sind m Gleichungen mit n Unbekannten x_1, \dots, x_n .

Eine Lösung des LGS ist ein n -Tupel (s_1, \dots, s_n) mit $s_i \in \mathbb{R}$, sodass alle m Gleichungen erfüllt sind, wenn jeweils s_i für x_i eingesetzt wird ($i = 1, \dots, n$).

Wir schreiben n -Tupel hier so: $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$

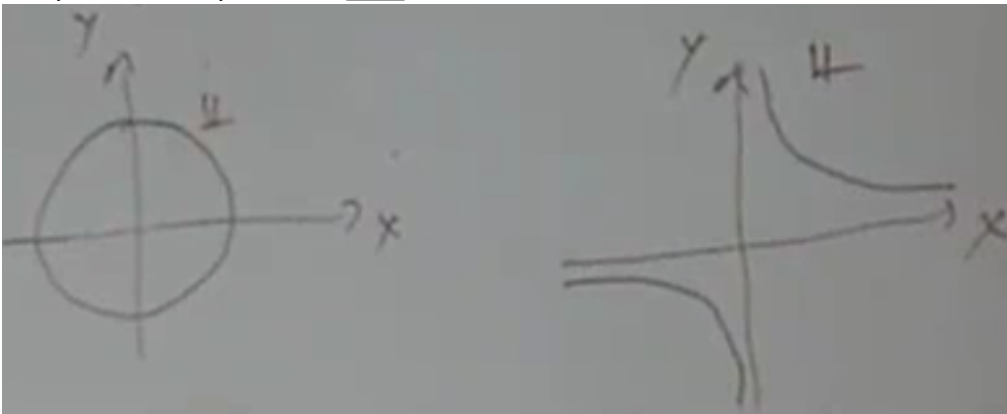
Die Menge aller Lösungen wird mit $\mathbb{L}((*))$ bezeichnet.

Das LGS $(*)$ heißt **homogen**, wenn $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, sonst **inhomogen**.

(1.2) Beispiel

$n = 2$, statt x_1, x_2 nimm x, y .

$x^2 + y^2 = 1$ und $x \cdot y = 1$ sind nicht linear.



$n = 2$, Unbekannte: x, y , $m = 2$

a) $x + y = 2, \quad x - y = 0$

b) $x + y = 2, \quad x + y = 0$

c) $x + y = 2, \quad 3x + 3y = 6$

§1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Lösung:

a) $x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

Einsetzen in $x + y = 2 \Rightarrow 2 \cdot x = 2 \Rightarrow x = 1 \Leftrightarrow y = 1$

Also $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ genau eine Lösung!

b) Es folgt der Widerspruch $2 = 0$. Also $\mathbb{L} = \emptyset$ keine Lösung!

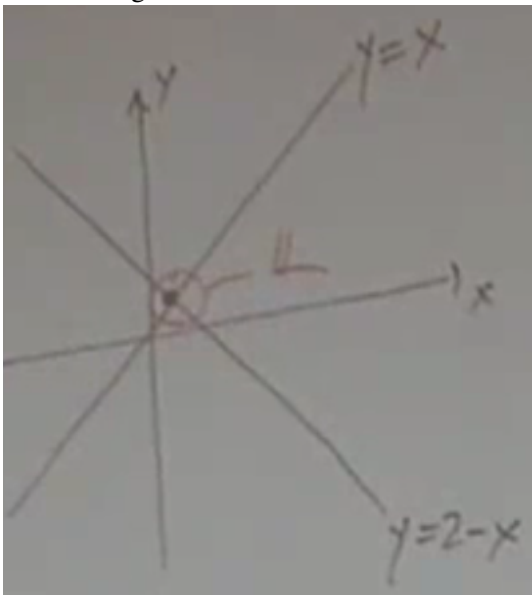
c) Aus $x + y = 2$ folgt $3 \cdot x + 3 \cdot y$, d.h. $3 \cdot x + 3 \cdot y = 6$ ist redundant. Aus $x + y = 2$ folgt $y = 2 - x$. (x bleibt frei)

Also $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2 - x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ unendlich viele Lösungen!

Auflösen + Einsetzen: algebraische Lösungsmethode.

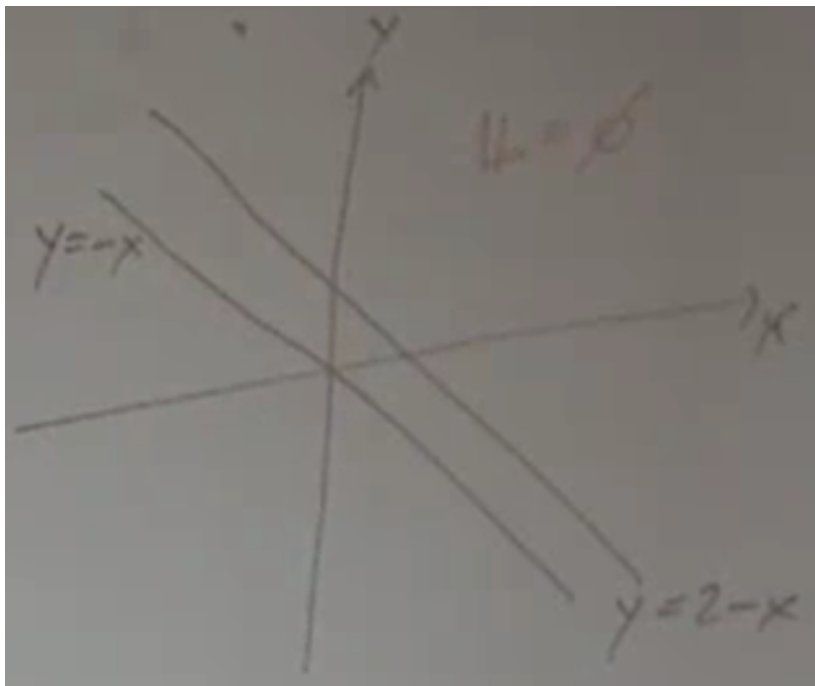
geometrische Lösung

a) eine Lösung

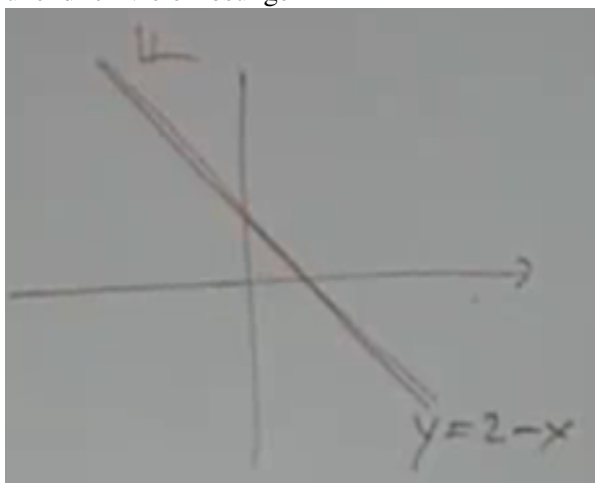


b) keine Lösung

§1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen



c) unendlich viele Lösungen



Die Lösungsmenge ist der Schnitt zweier Geraden, also gibt es **immer** 0,1 oder ∞ viele Lösungen.

(1.3)

a) Lösung des LGS

$$\begin{array}{r} x+y=2 \\ x-y=0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \cdot (-1) \\ \leftarrow + \end{array} \quad \text{Typ c)}$$

$$\begin{array}{r} x+y=2 \\ \textcircled{0}-2y=-2 \\ \hline \end{array}$$

$$1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{Elimination von } x$$

$$\begin{array}{r} x+y=2 \\ y=1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \leftarrow + \\ 1 \cdot (-1) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Typ b)} \\ \text{Typ c)} \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{rcl} x+ & 0 & = 1 \\ & y & = 1 \\ \hline & x & = 1 \\ & y & = 1 \end{array}}{\text{D.h. } \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Äquivalenzumformungen sind Alternative zum Auflösen + Einsetzen.

(1.4) Bemerkung

Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich nicht, wenn

- a) zwei Gleichungen vertauscht werden
- b) Eine Gleichung mit einem $c \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ multipliziert wird
- c) Das c -fache einer Gleichung zu einer anderen addiert wird ($c \in \mathbb{R}$).

Diese Umformungen heißen **Äquivalenzumformungen** oder Gauß-Umformungen.

Allgemein gilt: Sind $(*)$ und $(*)'$ zwei LGS mit $(*) \xrightarrow{\text{red}} (*')$, dann ist $\mathbb{L}((*)) \overset{\text{red}}{\subseteq} \mathbb{L}((*)')$

zu c)

$$\begin{array}{ccc}
 l_1 = r_1 & \begin{array}{c} \text{red} \\ \cdot c \\ \text{red} \end{array} & \leftarrow \\
 l_2 = r_2 & \begin{array}{c} \text{red} \\ + \\ \text{red} \end{array} & \Rightarrow \text{klar}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 l_1 = r_1 & \begin{array}{c} \text{red} \\ \cdot c \\ \text{red} \end{array} & \\
 c \cdot l_1 + l_2 = c \cdot r_1 + r_2 & \begin{array}{c} \text{red} \\ + \\ \text{red} \end{array} &
 \end{array}
 \quad (*)'$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} l_1 &= r_1 \\ l_2 &= r_2 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}((*)) \begin{array}{c} \subseteq \\ \supseteq \end{array} \mathbb{L}((*')), \text{ also „}=\text{“}.$$

Motivation für das weitere Vorgehen

- Gibt es eine Systematik im Lösungsverfahren aus Beispiel (1.3)?
- Lässt sich die Anzahl der Lösungen eines LGS unabhängig von den Lösungen selbst bestimmen (und evtl. leichter)?
- Hat die Lösungsmenge eines LGS eine „Struktur“?

(1.5) Definition (Matrizen)

Sei K ein Körper

a) Eine $(m \times n)$ -Matrix A über K ist ein rechteckiges „Schema“ von $m \cdot n$ Elementen $a_{ij} \in K$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =: (a_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Merke: Im Index gilt „Zeile vor Spalte“

Die a_{ij} heißen **Koeffizienten** oder **Einträge** von A .

a') (alternative Definition)

Eine $m \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ über K ist eine Abbildung

$$a : \underline{m} \times \underline{n} \rightarrow K, (i, j) \mapsto a_{ij}$$

vgl. n -Tupel $t : \underline{n} \rightarrow K$ aus (DS 1.7, 2.)

b) Zwei $(m \times n)$ -Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ über K heißen **gleich**, geschr. $A = B$, wenn $a_{ij} = b_{ij}$ für alle $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

$K^{m \times n} := K^{\underline{m} \times \underline{n}} :=$ Menge aller $m \times n$ -Matrizen.

c) Zeilen und Spalten

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$

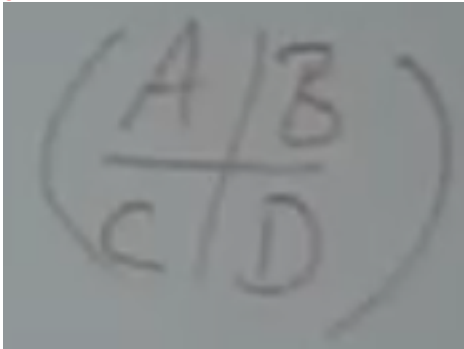
Die $(1 \times n)$ -Matrix $z_i := (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$ heißt **i -te Zeile** von A .

Die $(m \times 1)$ -Matrix $s_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ heißt **j -te Spalte** von A .

$$\text{Schreibe auch: } A = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = (s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n)$$

flexible Schreibweise:

größere Matrizen aus kleineren zusammenbauen



d) Tupel

Eine $(1 \times n)$ -Matrix wird auch **(Zeilen-)-n-Tupel** genannt.

Eine $(m \times 1)$ -Matrix wird auch **(Spalten-)-m-Tupel** genannt.

$K^m := K^{m \times 1} :=$ Menge aller Spalten-m-Tupel.

e) Nullmatrix

Die $(m \times n)$ -Matrix mit allen Koeffizienten gleich 0 heißt **Nullmatrix**. Geschrieben wird eine einfache 0.

(1.7) Beispiele

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine (3×2) -Matrix

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ ist eine (2×3) -Nullmatrix

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}_{3 \times 1} \neq \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{1 \times 3}$

(1.8) Definition (Koeffizientenmatrix)

Gegeben sei das LGS über K :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

mit $a_{ij}, b_i \in K (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$

Die Matrix $A := (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ heißt die **Koeffizientenmatrix** des LGS

Das Spalten- m -Tupel $b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ heißt die **rechte Seite** des LGS

Ist $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^m$ kurz $b = 0$, dann heißt das LGS **homogen**, sonst **inhomogen**.

Die Matrix $\left(\begin{array}{c|c} \boxed{A} & \boxed{b} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \in K^{m \times (n+1)}$

heißt **erweiterte Koeffizientenmatrix** des LGS.

Die Lösungsmenge \mathbb{L} des LGS ist die Menge aller Lösungen und wir bezeichnen sie präziser mit $\mathbb{L}(A, b) \subseteq K^n$.

Eine **Lösung** des LGS ist ein Spalten- n -Tupel

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}s_j = b_i, \quad \forall i = 1 \dots n$$

(1.9) Beispiel

Das LGS

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 = 5$$

$$3 \cdot x_4 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 = 5$$

$$3 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 3$$

hat die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$$

$$\text{Die Lösungsmenge ist } \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -t-2 \\ t \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

b) Betrachte $2x_1 + x_2 = 3$. Definiere: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1 + x_2$

$$\text{Dann } \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \mid 2s_1 + s_2 = 3 \right\} = f^{-1}(\{3\})$$

c) Sei $(A, b) \in K^{m \times (n+1)}$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines LGS, $A = (A_{ij})$. Definiere

$$\phi_A: K^n \rightarrow K^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

§1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

mit $y_i := \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, $1 \leq i \leq m$.

Dann $\mathbb{L}(A, b) = \phi_A^{-1}(\{b\})$ ($b \in K^m$)

§2 Der Gauß-Algorithmus

(1.0.1) (1.11) Definition (Zeilentransformationen)

Sei K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$. Jede der folgenden Umformungen heißt **elementare Zeilentransformation**.

(Typ I) $\tau_{ij}(1 \leq i, j \leq m)$ Vertausche Zeile i und Zeile j

(Typ II) $\alpha_{ij}(c)(1 \leq i \neq j \leq m, c \in K)$ Addiere das c -fache Zeile j zur Zeile i

(Typ III) $\mu_i(c)(1 \leq i \leq m, c \in K, c \neq 0)$ Multipliziere Zeile i mit c

Wir können τ_{ij} , $\alpha_{ij}(c)$, $\mu_i(c)$ als Abbildungen $K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times n}$ auffassen.

(1.0.2) (1.12) Beispiel

$K = \mathbb{Q}$, $m = 3$, $n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tau_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{12}(2)}$$

$$\xrightarrow{\alpha_{12}(2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 13 & 16 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_2(-1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 13 & 16 \\ 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.0.3) (1.13) Satz

Sei $(A, b) \in K^{m \times (n+1)}$ und sei $(A', b') \in K^{m \times (n+1)}$ durch eine Folge von elementaren Zeilentransformationen aus (A, b) hervorgegangen. Dann ist $\mathbb{L}(A, b) = \mathbb{L}(A', b')$.

Beweis:

$$\mathbb{L}(A, b) = \mathbb{L}(\tau_{ij}(A, b)) \quad (\S 2.1)$$

$$= \mathbb{L}(\alpha_{ij}(c)(A, b)) \quad \text{vgl. (1.4)} \quad (\S 2.2)$$

$$= \mathbb{L}(\mu_{ij}(c)(A, b)) \quad \forall 1 \leq i, j \leq m, c \in K, i \neq j \quad (\S 2.3)$$

(1.0.4) (1.14) Definition (Zeilenstufenform)

Eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ hat **Zeilenstufenform** wenn

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \boxtimes & * & \dots & & * \\ 0 & 0 & \boxtimes & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxtimes & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \boxtimes \neq 0, * \text{ beliebig}$$

§2 Der Gauß-Algorithmus

Formal

Sei z_i die i -te Zeile von A , d.h. $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$, $z_i \in K^{1 \times n}$

Sei $k_i \in \mathbb{N}$ die Anzahl der „führenden Nullen“ von z_i plus 1, d.h.

$$z_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k_i-1}, \underbrace{\boxed{\times}}_{k_i}, * \dots *)$$

A hat Zeilenstufenform, wenn gilt: $k_1 < k_2 < \dots < k_r < k_{r+1} = \dots = k_m = n + 1$

(1.0.5) (1.15) Gauß-Algorithmus (Teil I)

Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ kann durch eine Folge elementarer Zeilentransformationen von Typ I und Typ II auf Zeilenstufenform gebracht werden. Sei $A = (s_1, \dots, s_n)$, $a_{ij} \in K, s_j \in K^m$

1. Wenn $A = 0$ dann fertig
2. Sei $k := \min\{j \mid 1 \leq j \leq n, s_j \neq 0\}$
3. Wähle ein i mit $a_{ik} \neq 0$ (erste Spalte $\neq 0$) und tausche Zeile 1 mit Zeile i (d.h. τ_{1i})
4. Für jedes $i = 2, \dots, k_1$ wende $\delta_{i1}(-\frac{a_{ik}}{a_{1k}})$ an
5. Mache weiter mit Zeile $2, \dots, m$

(1.0.6) (1.16) Beispiel

(1.16) Beispiel

$$Ver_n(i, j) = c_{ij}$$

$$Add_n(i, j, c) = a_{ij}(c)$$

$$Mul_n(i, c) = u_i(c)$$

wobei n = Anzahl der Zeilen

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -3 & -6 \\ 1 & -2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 5}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

§2 Der Gauß-Algorithmus

Merke: Erst gucken, dann rechnen!

(1.0.7) (1.17) Anwendung

Lösungsverfahren für homogenes LGS

1. Sei $A \in K^{m \times n}$ die Koeffizientenmatrix eines LGS
2. Bringe A auf Zeilenstufenform mit Gauß I (1.15)
Die r Unbekannten $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$ heißen **abhängig**, die anderen heißen **frei**
3. Ersetze die freien Unbekannten durch Parameter t_1, t_2, \dots, t_{n-r}
4. Löse von unten nach oben nach dem anhängigen Unbekannten auf „Rückwärtssubstitution“

(1.0.8) (1.18) Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 5}$$

Abhängig: x_1, x_3, x_4

Frei: x_2, x_5

- a) $x_2 = t_1, x_5 = t_2; t_1, t_2 \in \mathbb{Q}$ beliebig
- b) Zeile 3: $-x_4 + 3x_5 = 0 \Rightarrow x_4 = 3x_5 = 3t_2$
Zeile 2: $2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}t_2$
Zeile 1: $\dots \Rightarrow x_1 = 2t_1 - \frac{3}{2}t_2$

$$\mathbb{L}(A, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} 2t_1 - \frac{3}{2}t_2 \\ t_1 \\ \frac{1}{2}t_2 \\ 3t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{Q} \right\}$$

(1.0.9) (1.19) Bemerkung

- a) Ein homogenes LGS hat immer eine (d.h. mind. eine) Lösung, nämlich die **triviale Lösung** $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$
- b) Hat ein homogenes LGS weniger Gleichungen als Unbekannte (d.h. $m < n$), dann besitzt es eine **nicht-triviale Lösung**
- c) Für ein homogenes LGS sind folgende Aussagen äquivalent:
- Das LGS hat nicht-triviale Lösungen
 - Das LGS ist nicht-trivial lösbar
 - $\mathbb{L} \neq 0$ ($0 \in K^n$)
 - Es gibt freie Unbekannte ($n - r > 0$)

(1.0.10) (1.20) Anwendung (Lösungsverfahren für inhomogenes LGS)

Sei $(A, b) \in K^{m \times (n+1)}$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines LGS. Bringe (A, b) mit Algorithmus (1.15) auf Zeilenstufenform

Notiz: Da die schematische Darstellung aus der Vorlesung wenig erleuchtend und recht kompliziert war, formuliere ich die Fälle hier aus

1. Fall: Entsteht eine Matrix, bei der die letzte (unterste) nicht-Nullzeile bis auf die rechte Seite komplett mit Nullen gefüllt ist, so erhalten wir die Form $0x_1 + \dots + 0x_n = b_r$ mit $b_r \neq 0$, was ein Widerspruch ist. Es existiert also keine Lösung.

2. Fall: Die unterste nicht-Nullzeile hat ≥ 2 Spalten vom rechten Rand entfernt die erste Zahl die nicht Null ist (d.h. alle Matrizen in Zeilenstufenform bei denen Fall nicht zutrifft). Definiere abhängige/freie Unbekannte genau wie bei homogenen LGS und mache Rückwärtssubstitution.

1. Spezielle Lösung des inhomogenen LGS

Wähle eine Lösung $s \in \mathbb{L}(A, b)$ indem alle freien Unbekannten 0 gesetzt werden

2. Allgemeine Lösung den zugehörigen homogenen LGS

Bestimme $\mathbb{L}_0 := \mathbb{L}(A, 0)$ wie in Anwendung (1.17)

3. Allgemeine Lösung des inhomogenen LGS

$$\mathbb{L}(A, b) = s + \mathbb{L}_0 = \{s + u \mid u \in \mathbb{L}_0\} \subseteq K^n$$

$$\text{wobei } s + u := \begin{pmatrix} s_1 + u_1 \\ \vdots \\ s_n + u_n \end{pmatrix}$$

(1.0.11) (1.21) Beispiel

$$n = m = 4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4$$

$$(A, b) \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fall 2 trifft zu, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$, $r = 3$, frei: $x_2 = t$, abhängig: x_1 , x_3 , x_4

Rückwärtssubstitution:

$$\text{Zeile 3: } x_4 = -3, \text{ Zeile 2: } x_3 = -\frac{1}{2}, \text{ Zeile 1: } x_1 = 2t + \frac{31}{2}$$

Lösung:

§2 Der Gauß-Algorithmus

1. Spezielle Lösung des inhomogenen LGS: Wähle $t = 0$. $s = \begin{pmatrix} \frac{31}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$

2. Allgemeine Lösung des homogenen LGS: $\mathbb{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Q} \right\}$

3. Allgemeine Lösung des inhomogenen LGS:

$$\mathbb{L}(A, b) = s + \mathbb{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{31}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Q} \right\}$$

(1.0.12) (1.22) Bemerkung

Beim Lösen von LGS mit dem Gauß-Algorithmus bedeutet eine **Spaltenvertauschung** genau eine Vertauschung der zugehörigen Unbekannten. Vertauschen ist also erlaubt, wenn man es sich für die Zuordnung zum LGS merkt. Niemals kann man die b -Spalte vertauschen.

z.B. Löse das LGS mit:

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{-3}^{x_1} & \overbrace{1}^{x_2} & \overbrace{-1}^{x_3} & \overbrace{2}^b \\ -2 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1}^{x_2} & \overbrace{-1}^{x_3} & \overbrace{-3}^{x_1} & \overbrace{1}^b \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ \Rightarrow x_2 &= 13 \\ x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(1.0.13) (1.23) Definition (Reduzierte Zeilenstufenform, Normalform)

Eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ hat **reduzierte Zeilenstufenform**, wenn die „Stufen“ der Matrix jeweils mit eine 1 beginnen, also die erste Zahl in einer Zeile ungleich 0 steht eine 1 ist, und ausserdem die Zahl über dieser 1 eine 0 ist. Etwa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & 1 & * \dots * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * \dots * & 0 & * \dots * \\ & & & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

A hat **Normalform**, wenn die führenden Einsen den reduzierten Zeilenstufenform eine Diagonale Linie innerhalb eines Null-Blocks bilden. Etwa:

§2 Der Gauß-Algorithmus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.0.14) (1.24) Gauß-Algorithmus II

Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ kann durch eine Folge elementarer Zeilentransformationen (Typ I-III) auf reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden. Zusätzlich kann mit Spaltenvertauschungen die Normalform erzeugt werden.

(1.0.15) (1.25) Beispiel

Löse das LGS mit

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 5}$$

Mit $\alpha_{13}(4)$, $\alpha_{23}(1)$, $\mu_2(-1)$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (Nullzeile kann entfallen)}$$

Mit $\alpha_{12}(-\frac{3}{2})$, $\mu(\frac{1}{2})$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ (reduzierte Zeilenstufenform)}$$

Vertausche Spalten $x_2 \rightarrow x_4$, $x_3 \rightarrow x_2$, $x_4 \rightarrow x_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ (Normalform, ersten 3 Spalten abhängig, 4. Spalte frei)}$$

$$1. \text{ Spezielle Lösung: } s = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Allgemeine Lösung (homogen): } \mathbb{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Q} \right\}$$

§2 Der Gauß-Algorithmus

3. Allgemeine Lösung (inhomogen): $\mathbb{L}(A, b) = s + \mathbb{L}_0$

§3 Matrix-Arithmetik

Ab jetzt betrachten wir auch Matrizen über kommutative Ringe (anstatt nur über Körpern). $R^{m \times n} :=$ Menge der $m \times n$ -Matrizen über R

Achtung: Gauß-Algorithmus funktioniert nicht, wenn R kein Körper ist!

(1.0.16) (1.27) Definition (Matrix-Arithmetik)

R ist kommutativer Ring, $A = (a_{ij}) = R^{m \times n}$, $r \in R$

a) $A^t := (a_{ij}^t)$ mit $a_{ij}^t := a_{ji}$ für $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ($A^t \in R^{n \times m}$) (Transponieren)

b) $r \cdot A = (r \cdot a_{ij}) \in R^{m \times n}$ (Skalare Multiplikation)

c) Für $B = (b_{ij}) \in R^{m \times n}$ ist $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in R^{m \times n}$ (Summe von A und B)

d) Für $A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times l}$

Sei $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$

$A \cdot B = (c_{ij})$ mit $c_{ij} := \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$ für $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq l$ ($A \cdot B \in R^{m \times l}$)

$A \cdot B$ ist nur definiert wenn Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B

(1.0.17) (1.28) Beispiele

a) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 3}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 3}$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 2}$$

$$3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nicht definiert: $A + A^t, A \cdot B$

b) A wie oben, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 4}$

$$A \cdot B \in \mathbb{Q}^{2 \times 4}$$

Falk-Schema:

§3 Matrix-Arithmetik

$$\begin{array}{ccc|cccc} & & & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & & & -1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 3 & 6 & 11 \end{array}$$

Spezialfälle

$$A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times l}$$

$$l = 1 : A \text{ wie oben, } B' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 1} = \mathbb{Q}^3 : A \cdot B' = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 1} = \mathbb{Q}^2$$

$$m = 1 : A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{1 \times 3}, B \text{ wie oben: } A' \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{1 \times 4}$$

$$l = 1, m = 1 : A' \cdot B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 + 0 + 0 = 3 \quad (\text{„Skalarprodukt“})$$

$$n = 1 : B' \cdot A' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

(1.22) Bemerkung

Matrixmultiplikation ist eine Abbildung

$$\cdot : R^{m \times n} \times R^{n \times l} \mapsto R^{m \times l}$$

Spezialfälle

- $\cdot : R^{m \times n} \times R^n \mapsto R^m \quad (l = 1)$
Matrix \cdot Spalte = Spalte
- $\cdot : R^{1 \times n} \times R^{n \times l} \mapsto R^{1 \times l} \quad (m = 1)$
Zeile \cdot Matrix = Zeile
- $\cdot : R^{1 \times n} \times R^n \mapsto R^{1 \times 1} = R \quad (l = 1, m = 1)$
Zeile \cdot Spalte = Zahl (Skalarprodukt)
- $\cdot : R^m \times R^{1 \times l} \mapsto R^{m \times l} \quad (n = 1)$
Spalte \cdot Zeile = Matrix

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_l \end{pmatrix}, \quad z_i \in R^{1 \times n}, \quad s_j \in R^{n \times 1}, \text{ dann ist } A \cdot B = \underbrace{(z_i \cdot s_j)}_{\text{Skalarp.}}_{ij} \in R^{m \times l}$$

(1.23) Beispiel und Schreibweise

$$\text{Sei } A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}, x \in K^n$$

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^m$$

Wir schreiben das LGS mit der erweiterten Koeffizientenmatrix (A, b) formal als Matrixgleichung $A \cdot x = b$
z.B. LGS

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 5 \\ x_1 - x_2 & = & -3 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}}_b$$

(1.24) Definition (für quadratische Matrizen)

Sei R kommutativer Ring

a)

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in R^{n \times n}$$

$$d_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ heißt } \mathbf{n\text{-elementige Einheitsmatrix}}$$

b) Eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} * & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & * \end{pmatrix}$ heißt Diagonalmatrix.

c) Eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & * \end{pmatrix}$ heißt obere Dreiecksmatrix.

$$\begin{pmatrix} * & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ * & \dots & * \end{pmatrix} \text{ heißt untere Dreiecksmatrix.}$$

(1.25) Satz

Sei R kommutativer Ring

a) Für alle $A, B, C \in R^{m \times n}$ gilt:

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. $0+A = A = A+0$
3. $A+(-1)A = 0 = (-1)A+A$
4. $A+B = B+A$

b) 1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times l}, C \in R^{l \times p}$
 2. $E_m \cdot A = A = A \cdot E_n \quad \forall A \in R^{m \times n}$
 3. $(A+B)C = A \cdot C + B \cdot C \quad \forall A, B \in R^{m \times n}, C \in R^{n \times l}$
 $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \forall B, C \in R^{m \times n}, A \in R^{n \times l}$
 4. $r(A \cdot B) = (rA) \cdot B = A \cdot (rB) \quad \forall r \in R, \forall A \in R^{m \times n}, \forall B \in R^{n \times l}$

c) 1. $(A^t)^t = A \quad \forall A \in R^{m \times n}$
 2. $(A+B)^t = A^t + B^t \quad \forall A, B \in R^{m \times n}$
 3. $(A \cdot B)^t = \underset{\text{Reihenfolge wichtig}}{B^t \cdot A^t} \quad \forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times l}$

a) $(R, +)$ Gruppe $\Rightarrow (R^{m \times n}, +)$ Gruppe
 $R^{m \times n} = \underline{R^{m \times n}}(R^{m \times n}, +)$ Gruppe Beispiel (0.17c)

b) 1. kann nachgerechnet werden, aber später eleganter Beweis!
 2. Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in R^{m \times n}$

Es gilt: $E_m \cdot A = (z_i \cdot s_j)_{i,j}$ wobei $z_i = (0 \dots 0 1 0 \dots 0)$ und $s_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

Also $z_i \cdot s_j = 0 \cdot a_{1j} + 0 \dots + 0 \cdot a_{i-1,j} + 1 \cdot a_{ij} + 0 \cdot a_{i+1,j} + \dots + 0 \cdot a_{nj} = a_{ij}$.
 D.h. $E_m \cdot A = A$.

□ Genauso: $A \cdot E_n = A$.

c) 1. klar
 2. klar
 3. Sei $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}, B = (b_{ij}) \in R^{n \times l}$.
 Beh. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$. **j bezeichnet Zeile**
 $(A \cdot B)^t = (\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj})^t = (\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj})_{ij}$

□

(1.26) Folgerung

Sei R kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}$.

$R^{n \times n}$ ist ein Ring bzgl. Matrixaddition und -multiplikation (aus Def. 1.20). Er heißt Matrizenring.

Die neutralen Element sind:

$$0 = 0 \in R^{n \times n} \text{ (Nullmatrix)}$$

$$1 = E_n \in R^{n \times n} \text{ (Einheitsmatrix)}$$

(1.27) Bemerkung und Beispiele

Sei $R \neq \{0\}$ (dh. $1 \neq 0$), $n > 1$

a) $\exists A \in R^{n \times n}$, $A \neq 0$ mit $A^2 = 0$.

$$\text{zB. } \begin{pmatrix} \dots & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & \ddots \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

(B3) ist verletzt, also $R^{n \times n}$ kein Körper (selbst wenn R Körper ist)

b) $R^{n \times n}$ ist nicht kommutativ

$$\text{zB. } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Schema für Multiplikation in $R^{n \times n}$

$$\begin{array}{ccccccc} & B & C & D & \dots \\ A & A \cdot B & A \cdot B \cdot C & A \cdot B \cdot C \cdot D & \dots \end{array}$$

d) $R^{n \times n}$ ist auch (sogar kommutativer) Ring mit der komponentenweise Multiplikation. Dieser Ring ist nicht besonders interessant.

(1.28) Definition (Lineare Gruppe)

Sei R kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}$.

Die Einheitengruppe von $(R^{n \times n})^*$

$$\text{GL}_n(R) := (R^{n \times n})^* = \{A \in R^{n \times n} \mid A \text{ invertierbar}\}$$

heißt volle **Lineare Gruppe** über R vom Grad n . Genauer: $(\text{GL}_n(R), \cdot)$ (\cdot ist Matrixmultiplikation.)

Die invertierbaren Matrizen heißen auch regulär.

(1.29) Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}.$$

$$A \text{ ist regulär: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ab jetzt: $R = K$ wieder ein Körper.

(1.30) Satz: LGS mit regulärer Koeffizientenmatrix

Sei K Körper, $A \in \text{GL}_n(K)$, $b \in K^n$.

a) $\phi : K^n \rightarrow K^n, x \mapsto A \cdot x$ ist bijektiv.

b) Für jedes $b \in K^n$ ist $A \cdot x = b$ eindeutig lösbar. (Die eindeutige Lösung lautet: $A^{-1} \cdot b$)

Beweis.

$$\text{a) } b \in K^n \Rightarrow \phi(A^{-1} \cdot b) = A \cdot (A^{-1} \cdot b) \stackrel{(1.25)b(1)}{=} (A \cdot A^{-1}) \cdot b = E_n \cdot b = b.$$

Also ist ϕ surjektiv.

$$x, x' \in K^n : \phi(x) = \phi(x') \Rightarrow A \cdot x = A \cdot x' \quad |A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot x) = A^{-1} \cdot (A \cdot x')$$

$$\stackrel{(1.25)b(1)}{\Rightarrow} \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{E_n} \cdot x = \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{E_n} \cdot x'$$

$$\Rightarrow x = x'.$$

Also ϕ injektiv.

b) a) \Leftrightarrow b) ϕ ist bijektiv \Leftrightarrow Für jedes $b \in K^n$ hat $\phi^{-1}(\{b\})$ genau ein Element.

$$\mathbb{L}(A, b) = \phi^{-1}(b) \Leftrightarrow \text{Für jedes } b \in K^n \text{ ist } A \cdot x = b \text{ eindeutig lösbar.}$$

(1.31) Beispiel

Löse $A \cdot x = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ für (viele) verschiedene $b \in K^2$.

A ist regulär nach Beispiel (1.29). $\stackrel{\text{Satz}(1.20)}{\Rightarrow} A \cdot x = b$ eindeutig lösbar $\forall b \in K^2$

$$\text{z.B. } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{Lösung lautet: } \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{Lösung von } A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ lautet: } \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \text{Lösung lautet: } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1.32) Bemerkung

Sei R kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}$ Ist $A \in \text{GL}_n(R)$, so ist auch $A^t \in \text{GL}_n(R)$ und es gilt: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Beweis: Prüfe nach:

$$(A^t) \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = E_n^t = E_n$$

$$(A^{-1})^t \cdot A^t = (A \cdot A^{-1})^t = E_n^t = E_n$$

Also gilt die Behauptung. \square

§4 Matrixgleichungen und Regularität

Sei $A \in K^{n \times n}$. A regulär: $\exists A^{-1} \in K^{n \times n} : A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$

Wie findet man A^{-1} ?

z.B.: Löse die Gleichung $X \cdot A = A \cdot X = E_n$ mit X „unbekannter Matrix“.

(1.32) Bemerkung

Sei R Ring, $a, b, c \in R$

$b \cdot a = a \cdot c = 1 \Rightarrow b = c = a^{-1}$ und $a \in R^*$.

Beweis: $b = b \cdot 1 = b \cdot (ac) = (ba) \cdot c = 1 \cdot c = c$.

Es reicht z.B. $\underline{A \cdot X = E_n}$ zu lösen und die Lösbarkeit von $X \cdot A = E_n$ zu kennen.

□

(1.33) Bemerkung

Seien $A \in K^{m \times n}, B \in K^{m \times l}$ gegeben und seien $b_1, \dots, b_l \in K^m$ die Spalten von B .

Die Lösung der „Matrixgleichung“

$A \cdot X = B$ mit $X \in K^{n \times l}$

sind genau diejenigen $X \in K^{n \times l}$ deren Spalten $x_1, \dots, x_l \in K^n$

$A \cdot x_i = b_i$ für jedes $1 \leq i \leq l$

$A \cdot X = B$ ist genau dann (eindeutig) lösbar, wenn $A \cdot x_i = b_i$ für jedes $1 \leq i \leq l$ (eindeutig) lösbar ist.

(1.34) Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Löse $A \cdot X = B$, $X \in K^{2 \times 3}$.

$$\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & \alpha_{12}(1) \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \alpha_{21}(-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

A muss nicht quadratisch sein!

(1.35) Anwendung: Inversenberechnung.

Sei $A \in K^{n \times n}$ und regulär. Dann findet man A^{-1} indem man $A \cdot X = E_n$ löst nach Schema und Bsp. (1.34):

$$\begin{array}{c|c}
 A & E_n \\
 \hline
 & \\
 \hline
 E_n & A^{-1}
 \end{array}$$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cc|cc}
 1 & 2 & 1 & 0 & \alpha_{12}(1) \\
 -1 & -1 & 0 & 1 & \\
 \hline
 1 & 2 & 1 & 0 & \\
 0 & 1 & 1 & 1 & \alpha_{21}(-2) \\
 \hline
 1 & 0 & -1 & -2 & \\
 0 & 1 & 1 & 1 &
 \end{array}
 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn E_n hier nicht möglich (eine Nullzeile) dann ist A nicht invertierbar.

Erinnerung

$\tau_{ij}, \alpha_{ij}(c), \mu_i(c) : K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times n}$ elementare Zeilentransformation.

Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei g eine elementare Zeilentransformation auf m Zeilen, d.h. $g = \tau_{ij}$, oder $\alpha_{ij}(c)$ oder $\mu_i(c)$ mit $1 \leq i, j \leq m$.

g definiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung

$$g : K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times n}$$

(1.36) Bemerkung

Für jedes $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times l}$ gilt:

a) $g(A) \cdot B = g(A \cdot B)$

b) $g(A) = g(E_m \cdot A) = g(E_m) \cdot A$

(1.37) Definition.

Die Matrizen $g(E_m)$ heißen **Elementarmatrizen**; sie entstehen durch Anwendung einer einzelnen elementaren Zeilentransformation auf die Einheitsmatrix, also:

$$\tau_{ij}(E_m) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ - & - & - & 0 & - & - & 1 & - & - \\ & & & | & 1 & & | & & \\ & & & | & & \ddots & | & & \\ - & - & - & 1 & - & - & 0 & - & - \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} =: T_{ij}$$

$$\alpha_{ij}(c)(E_m) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ - & - & 1 & - & c & - & - & & \\ & & & \ddots & | & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} =: A_{ij}(c)$$

$$\mu_i(c)(E_m) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ - & - & c & - & - & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} =: M_i(c)$$

(1.38) Bemerkung

- a) $\tau_{ij} : K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times n}, A \mapsto T_{ij}A$
 $\alpha_{ij}(c) : K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times n}, A \mapsto A_{ij}(c)A$
 $\mu_i(c) : K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times n}, A \mapsto M_i(c)A$

- b) Die Elementarmatrizen sind regulär:

$$T_{ij}^{-1} = T_{ji}$$

$$A_{ij}(c)^{-1} = A_{ij}(-c)$$

$$M_i(c)^{-1} = M_i(c^{-1})$$

und ihre Inversen sind selbst Elementarmatrizen.

(1.39) Folgerung

Für jedes $A \in K^{m \times n}$ gibt es ein reguläres $G \in K^{m \times n}$ (G ist Produkt von Elementarmatrizen) so, dass $G \cdot A$ reduzierte Zeilenstufenform hat.

Beweis: Gauß-Algorithmus und (1.38):

Es gibt eine Folge von Elementarmatrizen

$E_1, \dots, E_l \in K^{m \times n}$ so, dass

$E_l(\dots(E_2 \cdot (E_1 A)))$ reduzierte Zeilenstufenform hat.

$G := E_l \cdots E_1$ regulär.

□

(1.40) Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{21}(2)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = A_{2,1}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = A_{1,2}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = E_2 \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}}$$

$$\Rightarrow G \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.41) Satz

Sei $A \in K^{m \times n}$

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

i) $A \cdot x = 0$ ist nur trivial lösbar.

ii) jede Zeilenstufenform von A hat n Stufen

iii) die reduzierte Zeilenstufenform von A hat die Form $\begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$ mit n-m Nullzeilen.

iv) es gibt $x \in K^{n \times m}$ mit $x \cdot A = E_n$

x heißt „Linksinverse“.

v) $\varphi_A : K^n \rightarrow K^m, x \mapsto A \cdot x$ ist injektiv

Beweis von a) mit „Ringschluss“:

i) \Rightarrow ii) $A \cdot x$ nur trivial lösbar

\Rightarrow keine freien Unbekannten $\Rightarrow n - r = 0$ (r Anzahl der Stufen) $\Rightarrow n = r$.

ii) \Rightarrow iii) Anzahl Stufen = Anzahl Spalten

\Rightarrow alle Stufen haben die Breite 1. \Rightarrow reduzierte Zeilenstufenform.

iii) \Rightarrow iv) Folgerung (1.34):

Es gibt $G \in K^{m \times m}$ mit $G \cdot A = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$. Wähle die oberen n Zeilen von G , dann $X \cdot A = E_n$.

iv) \Rightarrow v) Sei $\varphi_A(x) = \varphi_A(x'), \quad x, x' \in K^n$.

$A \cdot x = A \cdot x' \quad |x \cdot$

$\Rightarrow x(Ax) = x(Ax') \Rightarrow \underbrace{(xA)}_{E_n} x = \underbrace{(xA)}_{E_n} x' \Rightarrow x = x'.$

v) \Rightarrow i) trivial.

□

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- i) $A \cdot x = b$ ist für alle $b \in K^m$ lösbar.
- ii) jede Zeilenstufenform von A hat m Stufen, also keine Nullzeilen.
- iii) die Normalform von A hat die Form $(E_M | \underbrace{*}_{n-m})$ (keine Nullzeile!)
- iv) es gibt $x \in K^{n \times m}$ mit $A \cdot x = E_m$.
 x heißt „Rechtsinverse“.
- v) $\varphi_A : K^n \rightarrow K^m, x \mapsto Ax$ ist surjektiv.

Beweis als Übung.

(1.42) Folgerung

Sei $A \in K^{n \times n}$ quadratisch. Dann ist jede der Aussagen unter a) und b) äquivalent dazu, dass A regulär ist. Die Inverse von A findet man also durch Lösen der Gleichung $A \cdot X = E_n$, gemäß Bemerkung (1.33). Wenn $A \cdot X = E_n$ lösbar ist, dann ist A regulär und die Lösung für X ist die Inverse A^{-1} , sonst ist A nicht regulär.
 $X \cdot A = E_n$ und $A \cdot X = E_m$ lösbar $\Rightarrow A$ regulär.

(1.43) Folgerung

Jede reguläre Matrix hat als reduzierte Zeilenstufenform die Einheitsmatrix.

Jede reguläre Matrix ist Produkt von Elementarmatrizen.

Beweis: Nach Folgerung (1.39) gibt es Elementarmatrizen E_1, \dots, E_l mit $E_l \cdots E_1 \cdot A = (E_n)$.
 $\Rightarrow A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_l^{-1}$ Produkt von Elementarmatrizen.

Teil II

Vektorräume und lineare Abbildungen

§5 Vektorräume

(2.0.1) (2.1) Definition (Vektorraum)

Sei K ein Körper und $(V, +)$ eine abelsche Gruppe. V heißt K -**Vektorraum** oder Vektorraum über K , wenn eine skalare Multiplikation definiert ist:

$$\cdot : K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v = \lambda v$$

mit:

$$(V1) (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

$$(V2) \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$$

$$(V3) \lambda(\mu v) = (\lambda \mu)v$$

$$(V4) 1v = v \quad \text{für alle } \lambda, \mu \in K \text{ und } v, w \in V$$

Die Elemente von V heißen **Vektoren**, die Elemente von K **Skalare**.

Achtung: 0 bezeichnet sowohl $0 \in K$ als auch $0 \in V$. Die $0 \in V$ heißt **Nullvektor**, geschrieben \mathcal{O}

(2.0.2) (2.2) Folgerungen

Sei V ein K -Vektorraum (kurz: K -VR). Für alle $\lambda \in K, v \in V$ gelten:

$$(W1) 0v = \mathcal{O}$$

$$(W2) \lambda \mathcal{O} = \mathcal{O}$$

$$(W3) \underbrace{-v}_{(V,+)} = \underbrace{(-1)v}_{(K,+)}$$

(2.0.3) (2.3) Beispiele

a) $V = \{0\}$ ist der **triviale K -Vektorraum**.

b) Sind $K \subseteq L$ zwei Körper (insbes. $K = L$) dann ist L ein K -VR mit

$$\cdot : K \times L \rightarrow L, (\lambda, a) \mapsto \underbrace{\lambda a}_{\text{Mult. in } L}$$

Zum Beispiel \mathbb{R} ist \mathbb{Q} -VR, \mathbb{C} ist \mathbb{R} -VR

c) $(K^{m \times n}, +)$ ist K -VR mit

$$\cdot : K \times K^{m \times n} \mapsto K^{m \times n}, (\lambda, A) \mapsto \lambda A \quad (\text{Def. 1.27b})$$

Die Elemente von $K^n = K^{n \times 1}$ und $K^{1 \times n}$ heißen **Spaltenvektor** bzw. **Zeilenvektor**

d) Sei M Menge. Dann ist K^M ein K -VR mit

$$\cdot : K \times K^M \rightarrow K^M, (\lambda, f) \mapsto \lambda f$$

$$(\lambda f)(x) = \underbrace{\lambda f(x)}_{\text{Mult. in } K}$$

Speziell:

$$M = \underline{m} \times n$$

$$K^M = K^{\underline{m} \times n} = K^{m \times n}$$

$$\mathbb{R}\text{-VR: } \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} \\ C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\} \\ C^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ beliebig oft diffbar}\} \\ \text{Pol}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0\} \end{cases}$$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\} \text{ (Folgenraum, Funktionalanalysis(?))}$$

(2.0.4) (2.4) Definition und Bemerkung (Untervektorraum)

Sei V ein K -VR, $W \subseteq V$. W heißt **(K -)Untervektorraum** (Kurz: UVR oder Unterraum) von V , geschrieben $W \leq V$, wenn folgende Bedingungen gelten:

$$(UV1) \quad W \neq \emptyset$$

$$(UV2) \quad w + w' \in W \quad \forall w, w' \in W$$

$$(UV3) \quad \lambda w \in W \quad \forall \lambda \in K, w \in W$$

Bemerkung: Dann ist W selbst K -VR bzw. Addition und Multiplikation von V . Es ist $0 \in W$

(2.0.5) (2.5) Beispiele

a) Sei U K -VR. $\{0\} \leq V, V \leq U$. Für jedes $v \in V$ ist

$$K \cdot V = \{\lambda v \mid \lambda \in K\} \leq U$$

b) Für $W := \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in K^{1 \times n} \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0 \right\} \leq V = K^{1 \times n}$

c) $\text{Pol}(\mathbb{R}) \leq C^\infty(\mathbb{R}) \leq C(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

d) $V = \mathbb{R}^2$ (Ebene).

Geraden durch $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind UVR von V .

Geraden die nicht durch 0 gehen sind keine UVR von V

e) Sei V K -VR, $W_1, W_2 \leq V$.

Dann ist $W_1 + W_2 \leq V$ und $W_1 \cup W_2 \leq V$

$$(0.21): W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

Übung: Nachprüfen UV1-UV3

(2.0.6) (2.6) Definition (Linearkombination/Erzeugnis)

Sei V K -VR.

a) Seien $v_1, \dots, v_n \in V$

Eine **Linearkombination** von $\underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{n\text{-Tupel}}$ ist ein Element $v \in V$ der Form

§5 Vektorräume

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \text{ mit } \lambda_i \in K$$

b) Sei $M \leq U$, $M \neq \emptyset$

$\langle M \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i \mid \lambda_i \in K, v_i \in M, n \in \mathbb{N} \right\}$ ist die Menge aller Linearkombinationen (LK) von Elementen aus M

$$\langle \emptyset \rangle := \{0\}$$

$\langle M \rangle$ heißt **lineare Hülle** von M oder **Erzeugnis** von M

(2.0.7) (2.7) Beispiele

$$\text{a) } V = \mathbb{R}^3, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 - v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ sind LK von } (v_1, v_2)$$

$$\langle \{v_1, v_2\} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\} \quad (\text{Übung})$$

b) $K = \mathbb{R}$, $V = C^\infty(\mathbb{R})$

$$v_1 = \text{id}_{\mathbb{R}}, \quad v_2 = \sin$$

$$\langle \{v_1, v_2\} \rangle = \{a \cdot \text{id}_{\mathbb{R}} + b \cdot \sin \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mapsto ax + b \sin x \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

(2.0.8) (2.8) Satz

Sei V K -VR, $M \leq V$

a) $\langle M \rangle \leq V$

b) Ist $M \leq W \leq V$ dann ist $\langle M \rangle \leq W$

(d.h. $\langle M \rangle$ ist der kleinste UVR von V , der M enthält)

Beweis:

Seien $v_1, \dots, v_n \in M$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, dann ist $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in W$

$$v_i \in M \leq W \Rightarrow \lambda_i v_i \in W \text{ (UV3)} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in W, \quad \text{also } \langle M \rangle \leq W$$

(2.0.9) (2.9) Beispiel und Definition (Spalten-/Zeilenraum)

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ mit Zeilen $z_1, \dots, z_m \in K^{1 \times n}$ und Spalten $s_1, \dots, s_n \in K^m$

Sind $x_1, \dots, x_n \in K$, dann ist

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i s_i, \quad \text{ist eine LK von } (s_1, \dots, s_n) \text{ (hier } V = K^m)$$

Sind $y_1, \dots, y_n \in K$, dann ist

$$(y_1, \dots, y_n) \cdot A = \sum_{i=1}^n y_i z_i, \quad \text{ist eine LK von } (z_1, \dots, z_m) \text{ (hier } V = K^{1 \times n})$$

$$ZR(A) := \langle \{z_1, \dots, z_m\} \rangle \leq K^{1 \times n} \Rightarrow ZR(A) \text{ heißt } \mathbf{Zeilenraum} \text{ von } A$$

$$SR(A) := \langle \{s_1, \dots, s_n\} \rangle \leq K^m \Rightarrow SR(A) \text{ heißt } \mathbf{Spaltenraum} \text{ von } A$$

(2.10) Definition (lineare Abbildung/K-Homomorphismus)

Sei V, W K -VR, $\varphi : V \rightarrow W$.

1. φ heißt **lineare Abbildung** oder **K-K-Vektorraumhomomorphismus**, falls gelten:

$$\text{a) } \varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v') \quad \forall v, v' \in V$$

$$\text{b) } \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) \quad \forall \lambda \in K, v \in V$$

$$Hom_K(V, W) := \{ \varphi : V \rightarrow W \mid \varphi \text{ linear} \}$$

2. Ein K-Homomorphismus $\varphi \in Hom_K(V, V)$ heißt **Endomorphismus** von V

$$End_K(V) := Hom_K(V, V)$$

$$3. \varphi \in Hom_K(V, W) \text{ heißt } \begin{cases} \text{Monomorphismus} \\ \text{Epimorphismus} \\ \text{Isomorphismus} \end{cases} \quad \text{falls } \varphi \begin{cases} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{cases}$$

V und W heißen **isomorph**, geschrieben $V \cong W$, falls ein K-Isomorphismus $V \rightarrow W$ existiert.

(2.11) Beispiele

a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$

$$\varphi_1 : V \rightarrow W, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ ist linear}$$

$$\varphi_1 : V \rightarrow W, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1+a \\ b \end{pmatrix} \text{ ist nicht linear: } (1+a) + (1+b) = 2 + (a+b) \neq 1 + (a+b)$$

$$\varphi_1 : V \rightarrow W, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b^2 \end{pmatrix} \text{ ist nicht linear: } a^2 + b^2 \neq (a+b)^2$$

$$\varphi_1 : V \rightarrow W, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+c \\ b \end{pmatrix} \text{ ist linear}$$

b) $\varphi : K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times n}$, $A \mapsto A^t$ ist Isomorphismus

c) $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, r \in \mathbb{R}$

$\varepsilon_r : V \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(r)$ ist linear (ε_r heißt **Auswertungshomomorphismus**)

Beweis:

$$\text{i) } \varepsilon(f+g) = (f+g)(r) = f(r) + g(r) = \varepsilon_r(f) + \varepsilon_r(g)$$

$$\text{ii) } \varepsilon(\lambda f) = (\lambda f)(r) = \lambda f(r) = \lambda \varepsilon_r(f)$$

Also ist ε_r linear

d) $A \in K^{m \times n}$

$\varphi_A : K^n \rightarrow K^m, x \mapsto A \cdot x$ ist linear

Im folgenden ist φ_A immer so definiert!

Beweis:

$$\text{i) } \varphi_A(x+y) = A(x+y) = A(x) + A(y) = \varphi_A(x) + \varphi_A(y)$$

$$\text{ii) } \varphi_A(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda \varphi_A(x)$$

e) $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$

$\varphi : V \rightarrow V, f \mapsto f'$ (Ableitung) ist linear (Ableitungsregel)

Beweis: (Nach Analysis)

$$\text{i) } \varphi(f+g)' = (f+g)' = f' + g'$$

$$\text{ii) } \varphi(\lambda f) = (\lambda f)' = (\lambda \cdot f)' = (\lambda \cdot \varphi(f))$$

(2.12) Definiton (Kern + Bild)

Sei $\varphi \in \text{Hom}_K(V, W)$

1. $\text{Ker } \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} = \varphi^{-1}(\{0\}) \leq V$ heißt **Kern** von φ

2. $\text{Im } \varphi := \varphi(V) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} \leq W$ heißt **Bild** von φ

(2.13) Bemerkung

$\varphi \in \text{Hom}_K(V, W)$.

a) $\text{Ker } \varphi \leq V$

b) $\text{Im } \varphi \leq W$

c) φ injektiv $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi = \{0\}$

d) φ surjektiv $\Leftrightarrow \text{Im } \varphi = W$

e) Sei $w \in \text{Im } \varphi$, etwa $\varphi(v) = w, v \in V$

Dann ist $\varphi^{-1}(\{w\}) = v + \text{Ker } \varphi \stackrel{(0.18)}{=} \{v + v' \mid v' \in \text{Ker } \varphi\}$

Beweis:

a) (UV1) Sei $\varphi(v) = w$

$$v + \text{Ker } \varphi \leq \varphi^{-1}(w) : v' \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v') = w + 0 = w \Rightarrow v + v' \in \varphi^{-1}(w)$$

b) (UV2) $\varphi^{-1}(w) \leq v + \text{Ker } \varphi$

Sei $u \in \varphi^{-1}(w)$, d.h. $\varphi(u) = w$ zu zeigen: $u = v + v'$ für ein $v' \in \text{Ker } \varphi$

Setze $v' := u - v$. Dann ist $u = v + v'$ und $\varphi(v') = \varphi(u) - \varphi(v) = w - w = 0$. D.h. $v' \in \text{Ker } \varphi$

c) (UV3) Für $\lambda \in K, v \in \text{Ker } \varphi$ ist $\varphi(\lambda v) = \lambda \cdot \varphi(v) = \lambda \cdot 0 = 0$, d.h. $\lambda v \in \text{Ker } \varphi$ Also $\text{Ker } \varphi \leq V$.

d) als Übung.

e) φ injektiv $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi = \{0\} \Rightarrow$ Sei φ injektiv, $v \in \text{Ker } \varphi$. Zu zeigen: $v = 0$

$v \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(v) = 0_w = \varphi(0)$

$\Rightarrow v = 0_v$. \square „ \Leftarrow “ Sei $\text{Ker } \varphi = \{0\}$. zu zeigen: $v = v'$. $\varphi(v) = \varphi(v') \Rightarrow \varphi(v - v') = \varphi(v) - \varphi(v') =$

$\Rightarrow v - v' \in \text{Ker } \varphi$

$\Rightarrow v - v' = 0$

$v = v'$. \square

f) trivial.

g) $\varphi^{-1}(\{w\}) = v + \text{Ker } \varphi$, $\varphi(v) = w$. Setze $v' := u - v$. Dann ist $u = v + v'$ und

$\varphi(v') = \varphi(u - v) = \varphi(u) - \varphi(v) = w - w = 0$ „ \subset “ Sei $v' \in \text{Ker } \varphi$. Zu zeigen: $v + v' \in \varphi^{-1}(\{w\})$. $\varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v') = w + 0 = w$.

(2.14) Beispiele (u.a. Lösungsmengen bzgl. Kern/Bild)

a) Sei $K = \mathbb{R}$, $V = C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi : V \rightarrow V$, $f \mapsto f'$ ist linear.

φ ist surjektiv, d.h. $\text{Im } \varphi = V$

(Hauptsatz der Infinitesimalrechnung)

$\text{Ker } \varphi = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ ist konstant}\}$

b) Sei $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$, $\varphi_A : K^n \rightarrow K^m$, $x \mapsto A \cdot x$ linear.

a) $\text{Im } \varphi_A = \{A \cdot x \mid x \in K^n\} = \langle s_1, \dots, s_n \rangle = \text{SR}(A)$ wobei $s_1, \dots, s_n \in K^m$ die Spalten von A sind.

b) $\text{Ker } \varphi_A = \{x \in K^n \mid A \cdot x = 0\} = \mathbb{L}_0(A) = \mathbb{L}(A, 0) =$ Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot x = 0$ „Lösungsraum“.

c) Sei $c \in K^n$ Lösung des inhomogenen LGS $A \cdot x = b$ $\mathbb{L}(A, b) = c + \text{Ker } \varphi_A$

$\mathbb{L}(A, b) = \{c \in K^n \mid A \cdot c = b\} = \varphi_A^{-1}(\{b\}) \stackrel{\text{Bew. 2.13e}}{=} c + \text{Ker } \varphi_A$

vgl. $\mathbb{L}(A, b) = s + \mathbb{L}(A, 0)$

(2.14.1) (2.15) Satz

Sei $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $A \cdot x = b$ ist lösbar
2. $b \in \text{Im } \varphi_A$ (φ_A aus Bsp. (2.11d))
3. $b \in \text{SR}(A)$
4. $\text{SR}(A) = \text{SR}(A, b)$

Beweis

$$\begin{aligned}
 (i) & \xLeftrightarrow{\text{Def. } \varphi_A} (ii) \xLeftrightarrow{\text{Im } \varphi_A = SR(A)} (iii), (iv) \Rightarrow (iii), (iii) \Rightarrow (iv), b \in SR(A) \\
 & \Rightarrow \{s_1, \dots, s_n, b\} \leq SR(A) \\
 & \Rightarrow \langle \{s_1, \dots, s_n, b\} \rangle \leq \langle SR(A) \rangle = SR(A) \\
 & \Rightarrow SR(A, b)
 \end{aligned}$$

§6 Basis und Dimension

(2.16) Definition (linear un-/abhängig)

Sei K Körper, V ist K -VR (Vektorraum)

1. Ein n -Tupel (v_1, \dots, v_n) mit $v_i \in V$ heißt **linear abhängig** (l.a.), wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ existieren mit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$ und

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \mathcal{O}$$

Anderfalls heißt (v_1, \dots, v_n) **linear unabhängig** (l.u.).

2. $M \leq V$ heißt linear abhängig wenn ein linear abhängiges n -Tupel (v_1, \dots, v_n) existiert mit $v_i \in M, v_i \neq v_j$ für $i \neq j$. Anderfalls heißt M linear unabhängig.

Insbesondere \emptyset ist linear unabhängig (Schreibweise: $\langle v_1, \dots, v_n \rangle := \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$)

linear abhängig: Nullvektor lässt sich als nicht-triviale Linearkombination (LK) schreiben.

(2.17) Bemerkung

Sei $v \in M$, und seien $M' \subseteq M \subseteq V$.

- i) $0 \in M \Rightarrow M$ linear abhängig. $1 \cdot 0 = 0$ nicht-triviale LK. $\Rightarrow \langle 0 \rangle$ ist l.a.
 $(\dots, v, \dots, v, \dots)$ linear abhängig.
- ii) $v \neq 0 \Rightarrow \{v\}$ linear unabhängig
 $\lambda \cdot v = 0 \xrightarrow{(W5)} \lambda = 0 \vee v = 0 \Rightarrow \lambda = 0$
- iii) M' linear abhängig $\Rightarrow M$ linear abhängig *trivial*.
- iv) M linear unabhängig $\Rightarrow M'$ linear unabhängig (Kontraposition v. iii)
- v) (v_1, \dots, v_n) ist genau dann l.u. wenn für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

(2.18) Beispiele (Überprüfung auf l.a. bzw. l.u.)

- a) $V = \mathbb{Q}^2 \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ ist linear unabhängig:

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ mit $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x = 0$ eindeutig lösbar (d.h. nur die triviale Lsg). Also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist linear abhängig: $-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- b) Sei $A \in K^{m \times n}$ in Zeilenstufenform und $z_1, \dots, z_r \in K^{1 \times n}$ die nicht-Null Zeilen von A.
 Dann ist (z_1, \dots, z_r) linear unabhängig.
Insbesondere die Zeilen von E_n !

(2.19) Satz (Erzeugnisse bzgl. l.a./l.u.)

Sei $M \subseteq V, v \in V$

- a) M l.a. $\Leftrightarrow \langle M \setminus \{w\} \rangle = \langle M \rangle$ für ein $w \in M$
 a') M l.u. $\Leftrightarrow \langle M \setminus \{w\} \rangle \subsetneq \langle M \rangle$ für alle $w \in M$
 b') M l.u., $v \notin \langle M \rangle \Rightarrow M \cup \{v\}$ l.u.
 b) M l.u., $M \cup \{v\}$ l.a. $\Rightarrow v \in \langle M \rangle$

Beweis zu a)

Sei M l.a., etwa $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i = \mathcal{O}$, mit $v_1, \dots, v_n \in M$ paarweise verschieden, alle $\lambda_i \neq 0$.

$$w := v_1 = \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \cdot v_i \in \langle \{v_2, \dots, v_n\} \rangle$$

$$\Rightarrow w \in \langle M \setminus \{v_1\} \rangle$$

$$\stackrel{(2.8c)}{\Rightarrow} \langle M \rangle \subseteq \underbrace{\langle M \setminus \{v_1\} \rangle}_w$$

\supseteq : klar

„ \Leftarrow “: Sei $\langle M \setminus \{w\} \rangle = \langle M \rangle$ für ein $w \in M$.

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i, \quad v_i \in (M \setminus \{v_i\}), \lambda_i \in K.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i + (-1)w = \mathcal{O}$$

alle $v_i \neq w$
 $\Rightarrow M$ l.a.

(2.20) Beispiel

$$V = \mathbb{R}^2, M = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}}_{u_3} \right\}.$$

M ist l.a.: $u_3 + 3 \cdot u_1 = 0$

$$\Rightarrow \langle M \setminus \{w\} \rangle = \langle M \rangle \text{ für ein } w \in M.$$

hier z.B.: $w = u_3$ oder u_1 , aber nicht u_2 !

(2.21) Definition (Erzeugendensystem + Basis)

Seie $v_1, \dots, v_n \in V, M \subseteq V$.

M heißt **Erzeugendensystem von V** wenn $\langle M \rangle = V$.

M heißt **Basis von V** wenn M ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist.

(2.22) (Beispiele)a) \emptyset Basis von $\{\emptyset\}$

b) $V = K^n$. Für $1 \leq i \leq n$ sei $e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle}$ der i -te **Einheitsvektor**.

Dann ist (e_1, \dots, e_n) Basis von K^n . (**Standardbasis**).c) $V = K^{m \times n}$. Für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ sei $E_{ij} \in K^{m \times n}$ die Matrix mit einer 1 an Position (i, j) und Nullstellen sonst.Dann ist $(E_{11}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{2n}, E_{31}, \dots, E_{mn})$ eine Basis von $K^{m \times n}$.**(2.23) Satz (Charakterisierung von Basen)**Für $B \subseteq V$ sind äquivalent:

- (1) B ist Basis von V
- (2) B ist ein minimales Erzeugendensystem von V (d.h. $\langle B \rangle = V$, aber $\langle B' \rangle \neq V$ für alle $B' \subsetneq B$)
- (3) B ist eine maximale l.u. Teilmenge von V . (d.h. B l.u., aber B' l.a. für alle $B' \supsetneq B$)

Beweis: (Ringschluss $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$)(1) \Rightarrow (2). Sei B Basis von V , d.h. B l.u. und $\langle B \rangle = V$. Sei $B' \subsetneq B$, etwa $w \in (B \setminus B')$.

$$\text{Dann } B' \subseteq (B \setminus \{w\}) \Rightarrow \langle B' \rangle \subseteq \langle B \setminus \{w\} \rangle \stackrel{(2.19a)}{\subsetneq} \langle B \rangle = V$$

(2) \Rightarrow (3) Sei B minimal mit $\langle B \rangle = V$. Nach (2.19a') ist B l.u. Sei $B' \supsetneq B$, etwa $w \in (B' \setminus B)$.

$$\text{Dann } B \subseteq (B' \setminus \{w\}).$$

$$\Rightarrow V = \langle B \rangle \subseteq \langle B' \setminus \{w\} \rangle \subseteq \langle B' \rangle \subseteq V$$

$$\Rightarrow \langle B' \setminus \{w\} \rangle = \langle B' \rangle \stackrel{(2.19a)}{\Rightarrow} B' \text{ l.a.}$$

□

(3) \Rightarrow (1) (Übung!!!)**(2.24) Folgerung (Basisauswahl)**Jedes Erzeugendensystem M von V enthält eine Basis von V .

Insbesondere hat jeder VR eine Basis.

Beweis: nur falls $M \subseteq V$ endlich.Sei $\langle M \rangle = V$, M endlich.Wenn M , l.u., dann ist M Basis (fertig).Sei M l.a. Nach Satz (2.19a) gibt es $w \in M$ mit $V = \langle M \rangle = \langle M \setminus \{w\} \rangle$.Ersetze M durch $M' := M \setminus \{w\}$.Da M endlich, kommt man nach endlich vielen Schritten zu einer Basis von V .

im Bsp. (2.20):

$$M = \{u_1, u_2, u_3\} \cdot \langle M \rangle = \mathbb{R}^2$$

$M' = \{u_1, u_2\}$ oder $\{u_2, u_3\}$ sind l.u., also Basis.

(2.25) Satz

Sei B Basis von V , $|B| < \infty$.

- a) $w_1, \dots, w_n \in V, n > |B|$.
 $\Rightarrow (w_1, \dots, w_n)$ l.a.
- b) B' Basis von $V \Rightarrow |B'| \leq |B|$.
- c) B' Basis von $V \Rightarrow |B'| = |B|$.

Beweis:

- b) Seien $w_1, \dots, w_n \in B'$ paarweise verschieden. $\Rightarrow (w_1, \dots, w_n)$ l.u. $\stackrel{a)}{\Rightarrow} n \leq |B| \Rightarrow |B'| \leq |B|$.

- c) $|B'| \stackrel{b)}{\leq} |B| < \infty$.
 Satz (2.25b) für B' : $|B| \leq |B'|$, also $|B| = |B'|$.

- a) Sei $B = \{v_1, \dots, v_m\}$.

Seien $w_j = \sum_{i=1}^m a_{i,j} \cdot v_i$, $a_{i,j} \in K$, für $j = 1, \dots, n$.

Setze $A := (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$.

Betrachte $A \cdot x = 0$. Wegen $n > m$ ist $A \cdot x = 0$ nicht-trivial lösbar. (Bem. 1.19b)

Sei $c \in K^n, c \neq 0$, mit $A \cdot c = 0$, d.h.

$$(*) \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot c_j = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

Es folgt:

$$\sum_{j=1}^n c_j \cdot w_j = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_{i,j} \cdot v_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\underbrace{\sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot c_j}_{\stackrel{(*)}{=} 0} \right) \cdot v_i = \sum_{i=1}^m 0 \cdot v_i = 0$$

Weil $c \neq 0$, folgt (w_1, \dots, w_n) l.a. □

(2.26) Folgerung + Definition (Dimension)

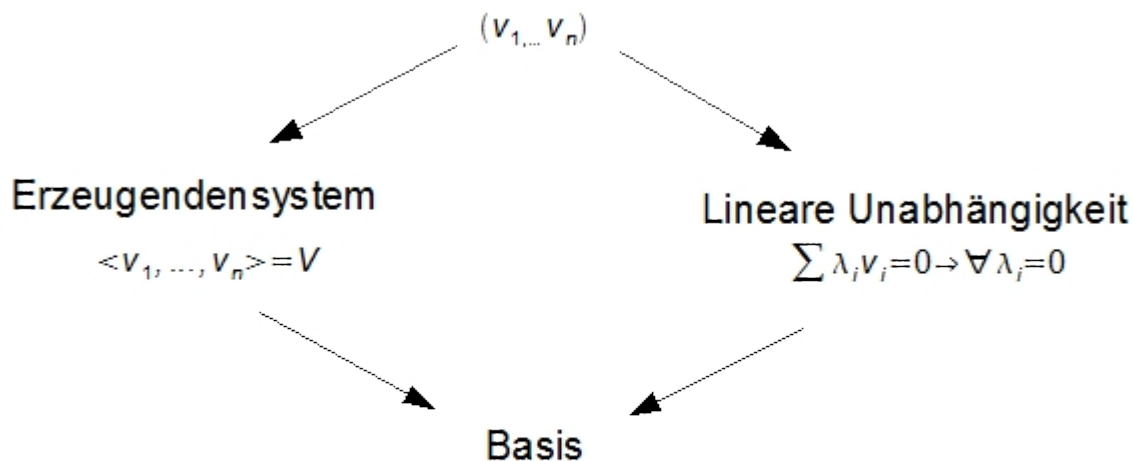
Es tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

- i) jede Basis von V ist unendlich.
- ii) es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass jede Basis von V genau n Elemente hat.

Definiere:

$$\dim V = \dim_K V := \begin{cases} \infty & \text{im Fall } i) \\ n & \text{im Fall } ii) \end{cases}$$

die **Dimension** von V .



(2.27) Beispiele:

a) $\dim_K \{\emptyset\} = 0$

$\dim_K K^n = n$

$\dim_K K^{m \times n} = m \cdot n$

b) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$

$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$

c) die \mathbb{R} -VR: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, C(\mathbb{R}), C^{\infty}(\mathbb{R}), \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ haben $\dim_{\mathbb{R}} = \infty$. (aus Bsp. 2.3)

d) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ denn $(1, i)$ ist Basis von \mathbb{C} über \mathbb{R} .

$\langle \{1, i\} \rangle = \mathbb{C}$: jedes $z \in \mathbb{C}$ hat die Form $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, d.h. $z \in \langle \{1, i\} \rangle$.

$\{1, i\}$ l.u.: $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot i = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$.

$\{1, i\}$ l.u.

z.B. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

$\{1, i\}$ l.a. über \mathbb{C} :

$\underbrace{i}_{\mathbb{C}} \cdot 1 + \underbrace{(-1)}_{\mathbb{C}} \cdot i = 0$

e) V K -VR, $v_1, \dots, v_n \in V$. $\dim_K \langle v_1, \dots, v_n \rangle = ?$

v_1, \dots, v_n l.u. $\Rightarrow \dim_K \langle v_1, \dots, v_n \rangle = n$.

(2.28) Folgerung (endlich dimensionaler VR)

Sei $\dim_K V = n < \infty, M \subseteq V$.

a) M l.u. $\Rightarrow |M| \leq n$.

b) (Basisergänzung)

M l.u. \Rightarrow es gibt Basis von V mit $B \supseteq M$.

„Jede linear unabhängige Teilmenge $M \subseteq V$ lässt sich zu einer Basis ergänzen.“

c) M l.u., $|M| = n \Rightarrow M$ Basis.

d) $\langle M \rangle = V, |M| = n \Rightarrow M$ Basis.

Sei $U \leq V$.

e) $\dim_K U \leq \dim_K V$.

f) $\dim_K U = \dim_K V \Rightarrow U = V$.

Beweis:

a) Kontraposition von (2.25a)

b) Basisergänzung.

Sei M l.u.

Wenn $\langle M \rangle = V$, dann M Basis. (fertig)

Sei $\langle M \rangle \neq V$, etwa $v \in (V \setminus \langle M \rangle)$.

(Satz 2.19 b'): $M \cup \{v\} := M'$ l.u.

Ersetze M durch M' .

Wegen a) bricht das Verfahren ab, wenn $|M| = n$ erreicht ist.

c) Basisergänzung.

d) Basisauswahl.

e) Basisergänzung.

f) Basisergänzung.

(2.29) Beispiel

$$V = \mathbb{R}^3. M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Wähle } v \notin \langle M \rangle, \text{ z.B. } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$M' := M \cup \{v\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Wähle } w \notin \langle M' \rangle, \text{ z.B. } w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$M'' := M' \cup \{w\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. M'' \text{ ist Basis weil } |M''| = 3 = \dim V \text{ bzw. } \langle M'' \rangle = V.$$

Basen werden verwendet:

- zur Beschreibung von Unterräumen (insbesondere Lösungsräumen von LGS)
- zur Beschreibung von linearen Abbildungen
- zur Einführung von Koordinaten bzw. Koordinatensystemen

(2.30) Definition (geordnete Basis)

Das n -Tupel (v_1, \dots, v_n) heißt **geordnete Basis** von V , wenn $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V ist und v_1, \dots, v_n paarweise verschieden sind. (dann $n = \dim V$)

Ab jetzt: alle VR seien endlich-dimensional und alle Basen seien geordnet.

(2.31) Bemerkung (Basis und Untervektorräume)

Jeder UR $U \leq V$ hat $0 \leq \dim U \leq \dim V$ und eine Basis, lässt sich also schreiben als $U = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, $r = \dim U \leq n = \dim V$, für geeignete (v_1, \dots, v_r) l.u.

z.B. $V = \mathbb{R}^3$. alle $U \leq V$?

$\dim U = 0$: $U = \{0\}$

$\dim U = 1$: $U = \langle v \rangle$, $v \neq 0$ Alle Geraden durch 0

$\dim U = 2$: $U = \langle u, v \rangle$, (u, v) l.u. Alle Ebenen durch 0

$\dim U = 3$: $U = \langle u, v, w \rangle = V = \mathbb{R}^3$, (u, v, w) l.u. ganz \mathbb{R}^3

(2.32) Satz

Sei V ein K -VR. Seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Die Abbildung

$$\varphi : K^n \rightarrow V, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i$$

ist linear. Wir bezeichnen φ mit $\varphi_{\mathcal{A}}$ wobei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$.

Es gilt:

$$\varphi_{\mathcal{A}} \text{ ist } \begin{cases} 1. \text{ injektiv} \\ 2. \text{ surjektiv} \\ 3. \text{ bijektiv} \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ ist } \begin{cases} \text{l.u.} \\ \text{Erzeugendensystem von } V \\ \text{Basis von } V \end{cases}$$

Insbesondere: \mathcal{A} ist Basis von $V \Leftrightarrow$ jedes $v \in V$ hat eine eindeutige Darstellung:

$$v = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{\text{Koordinaten von } v \text{ bezgl. } \mathcal{A}} \cdot v_i, \quad \lambda_i \in K$$

Beweis

linke Seite \Leftrightarrow jedes $v \in V$ lässt sich auf $\begin{cases} \text{höchstens} \\ \text{mindestens} \\ \text{genau} \end{cases}$ eine Weise als LK $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i, \lambda_i \in K$, schreiben.

1. „ \Rightarrow “ Wähle $v = 0. \Rightarrow \mathcal{A}$ l.u.

„ \Leftarrow “ \mathcal{A} l.u. $\Rightarrow 0$ lässt sich nur auf eine Weise als LK $\sum \lambda_i \cdot v_i$ schreiben. $\Rightarrow \text{Ker } \varphi_{\mathcal{A}} = \{0\} \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{A}} \text{ linear}} \varphi_{\mathcal{A}}$ injektiv.

2. klar

3. 1. + 2.

□

(2.33) Definition + Beispiel (Koordinatensystem)

Seien $\dim V = n < \infty$. Ein **Koordinatensystem von V** ist ein Isomorphismus $\kappa : K^n \rightarrow V$. Für $v \in V$ heißt $\kappa^{-1}(v)$ der **Koordinatenvektor** von v bzgl. κ .

Beispiel

Für jede Basis \mathcal{B} von V ist $\varphi_{\mathcal{B}}$ ein Koordinatensystem.

Jeder VR hat Basis, also auch ein Koordinatensystem.

Folge: Jeder VR V ist isomorph zu $K^n, n = \dim V$

Folge: $\dim V = \dim W \Rightarrow V \cong W$.

(2.34) Beispiele

a) \mathbb{C} als \mathbb{R} -VR.

$\kappa : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a + b \cdot i$ ist Koordinatensystem.

b) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\kappa = \varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(2.35) Satz

V, W K -VR.

$V \cong W \Leftrightarrow \dim_K V = \dim_K W$.

(2.36) Satz (Eindeutigkeit linearer Abbildungen zwischen Vektorräumen)

Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V . Für jeden K -VR W und jedes n -Tupel $(w_1, \dots, w_n), w_i \in W$, existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ mit $\varphi(v_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Schreibweise: statt $\varphi : V \rightarrow W, v \mapsto \varphi(v)$ kann man auch $\varphi : V \rightarrow W, v_i \mapsto w_i$ schreiben, da die Abbildung eindeutig ist.

Beweis. Existenz:

Jedes $v \in V$ hat eindeutige Darstellung als LK

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i \quad (2.32)$$

Definiere

$$\varphi(v) := \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot w_i$$

$\Rightarrow \varphi(v_i) = \varphi(1 \cdot v_i) = 1 \cdot w_i = w_i$ und φ linear.

Eindeutigkeit: Sei $\varphi : V \rightarrow W$ linear mit $\varphi(v_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Sei $v \in V$ beliebig, $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i \Rightarrow \varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i\right) \stackrel{\varphi \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot w_i$ □

ohne Beweis: von Satz (2.36) gilt auch die Umkehrung!

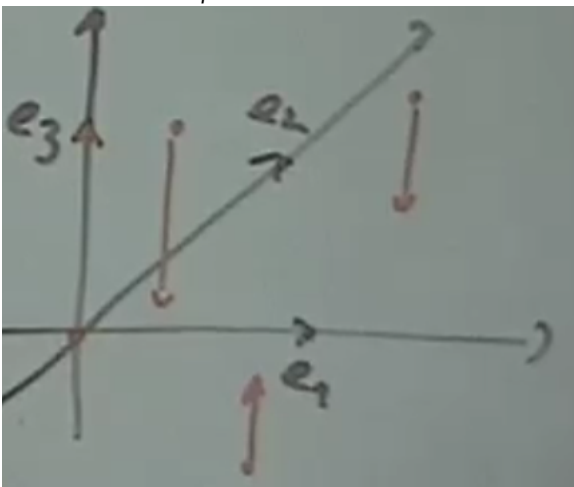
(2.37) Beispiel zur Eindeutigkeit

$$V = \mathbb{R}^3, \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3), \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$W = V = \mathbb{R}^3$ und $w_1 = e_1, w_2 = e_2, w_3 = 0$.

(2.36): $\exists! \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, v_i \mapsto w_i, \varphi$ linear. d.h. $e_1 \mapsto e_1, e_2 \mapsto e_2, e_3 \mapsto 0$.

Welche Abb. ist φ ?



φ ist Projektion auf die e_1 - e_2 -Ebene, entlang e_3 .

Abbildungsvorschrift:

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3 \mapsto x \cdot w_1 + y \cdot w_2 + z \cdot w_3 = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot 0.$$

$$\text{Ker } \varphi = e_3\text{-Achse} = \langle e_3 \rangle \quad \text{dim} = 1$$

$$\text{Im } \varphi = e_1\text{-}e_2\text{-Ebene} = \langle e_1, e_2 \rangle \quad \text{dim} = 2$$

$$\Sigma = 3 = \dim V$$

(2.38) Definition (Rang und Defekt von Matrizen)Sei $\varphi \in \text{Hom}_K(V, W)$.

$$\text{Rg } \varphi := \dim(\text{Im } \varphi) \quad \text{Rang von } \varphi \quad 0 \leq \text{Rg } \varphi \leq \dim_K W$$

$$\text{Def } \varphi := \dim(\text{Ker } \varphi) \quad \text{Defekt von } \varphi \quad 0 \leq \text{Rg } \varphi \leq \dim_K V$$

im Beispiel (2.37) ist $\text{Rg } \varphi = 2, \text{Def } \varphi = 1$.**(2.39) Satz (Dimensionsformel)**Für jedes $\varphi \in \text{Hom}_K(V, W)$ gilt

$$\text{Rg } \varphi + \text{Def } \varphi = \dim_K V.$$

Beweis: Für jede Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V gilt:

$$(*) \text{Im } \varphi = \langle \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \rangle.$$

$$\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \in \text{Im } \varphi \stackrel{(2.8c)}{\Rightarrow} \langle \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \rangle \subseteq \text{Im } \varphi.$$

„ \supseteq “ \checkmark „ \subseteq “ $v \in V, \varphi(v) \in \langle \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \rangle$?

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i, \quad \lambda_i \in K$$

$$\Rightarrow \varphi(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \varphi(v_i) \in \langle \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \rangle.$$

 \checkmark

$$\text{Ker } \varphi \leq V.$$

Sei (v_1, \dots, v_r) Basis von $\text{Ker } \varphi$. D.h. $r = \dim(\text{Ker } \varphi) = \text{Def } \varphi$.Ergänze (v_1, \dots, v_n) von V .

$$n = \dim V \geq r.$$

$$\Rightarrow \text{Im } \varphi = \langle \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \rangle = \langle \varphi(v_{r+1}), \dots, \varphi(v_n) \rangle. \quad \varphi(v_1) = \dots = \varphi(v_r) = 0$$

Wir zeigen: $(\varphi(v_{r+1}), \dots, \varphi(v_n))$ l.u.

$$\sum_{i=r+1}^n \lambda_i \cdot \varphi(v_i) = 0 \stackrel{\varphi \text{ linear}}{\Rightarrow} \varphi \left(\sum_{i=r+1}^n \lambda_i \cdot v_i \right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=r+1}^n \lambda_i \cdot v_i \in \text{Ker } \varphi.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=r+1}^n \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot v_i \text{ für geeignete } \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot v_i - \sum_{i=r+1}^n \lambda_i \cdot v_i = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \quad (v_1, \dots, v_n) \text{ l.u.}$$

$$\Rightarrow \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

□

Also $(\varphi(v_{r+1}), \dots, \varphi(v_n))$ Basis von $\text{Im } \varphi$, also $\text{Rg } \varphi = \dim(\text{Im } \varphi) = n - r = n - \text{Def } \varphi$,
also $\text{Rg } \varphi + \text{Def } \varphi = n$.

□

(2.40) Folgerung (injektiv, surjektiv, bijektiv bei linearen Abbildungen)

Sei $\varphi \in \text{Hom}_K(V, W)$. $\dim V = n, \dim W = m$

a) φ surjektiv (Epimorphismus)

$$\stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \text{Im}(\varphi) = W$$

$$\stackrel{(2.28f)}{\Leftrightarrow} \text{Rg}(\varphi) = \dim W = m$$

$$\stackrel{(2.39)}{\Leftrightarrow} \text{Def}(\varphi) = \dim V - \dim W = n - m$$

$$\Leftrightarrow (\forall M \subseteq V : \langle M \rangle = V \Rightarrow \langle \varphi(M) \rangle = W) \text{ „}\varphi \text{ bildet Erzeugendensystem auf Erzeugendensystem ab“}$$

b) φ injektiv (Monomorphismus)

$$\stackrel{(2.13c)}{\Leftrightarrow} \text{Ker}(\varphi) = \{0\}$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \text{Def}(\varphi) = 0$$

$$\stackrel{(2.39)}{\Leftrightarrow} \text{Rg}(\varphi) = \dim V = n$$

$$\Leftrightarrow (\forall M \subseteq V : M \text{ l.u.} \Rightarrow \varphi(M) \text{ l.u.}) \text{ „}\varphi \text{ bildet l.u. Mengen auf l.u. Mengen ab.“}$$

c) φ bijektiv (d.h. φ Isomorphismus)

$$\Leftrightarrow \text{Rg}(\varphi) = \dim V = \dim W = n = m$$

$$\Leftrightarrow (\forall M \subseteq V : M \text{ Basis von } V \Rightarrow \varphi(M) \text{ Basis von } W) \text{ „}\varphi \text{ bildet Basen auf Basen ab“}$$

d) Spezialfall: $n = \dim V = \dim W = m$ (z.B. $V = W$)

$$\varphi \text{ injektiv} \stackrel{b)}{\Leftrightarrow} \text{Rg}(\varphi) = n = m \stackrel{a)}{\Leftrightarrow} \varphi \text{ surjektiv} \quad \varphi : V \rightarrow V$$

Beweis von b)

„ \Rightarrow “ Sei φ injektiv, $M \subseteq V$ l.u.

zu zeigen: $\varphi(M)$ l.u.

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i \cdot \varphi(v_i) = 0, \quad v_i \in M \text{ paarweise verschieden}$$

$$\stackrel{\varphi \text{ lin.}}{\Rightarrow} \varphi \left(\sum_{i=1}^l \lambda_i \cdot v_i \right) = 0 \quad \varphi(v_i) \text{ paarweise verschieden} \Rightarrow v_i \text{ paarweise verschieden}$$

$$\stackrel{\varphi \text{ inj.}}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^l \lambda_i \cdot v_i = 0$$

$$M \text{ l.u.} + v_i \text{'s paarw. versch.} \Rightarrow \text{alle } \lambda_i = 0.$$

Also $\varphi(M)$ l.u.

„ \Rightarrow “ $\forall M \subseteq V : M \text{ l.u.} \Rightarrow \varphi(M) \text{ l.u.}$

zu zeigen: φ injektiv.

Sei $\varphi(v) = 0, v \in V$. (d.h. $v \in \text{Ker } \varphi$)

zu zeigen: $v = 0$.

Wähle $M = \{v\}$. Dann:

$\{v\}$ l.u. $\Rightarrow \{\varphi(v)\}$ l.u.

$\{v\}$ l.u. $\Leftrightarrow v \neq 0 \Rightarrow \varphi(v) \neq 0 \Leftrightarrow \{\varphi(v)\}$ l.u.

Also: $\varphi(v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

□

(2.41) Folgerung

$|K| = q < \infty$

$|K^n| = q^n, \dim_K V = n \Rightarrow |V| = q^n$.

§7 Unterräume von K^n und $K^{1 \times m}$

Beispiele

\mathbb{R}^n n -dimensionaler euklidischer Raum

\mathbb{Z}_p^n Gitterpunkte im n -dimensionalen Würfel Seitenlänge p . z.B.: \mathbb{Z}_2^3

Matrizen liefern UR:

(2.42) Definition (Fundamentallräume)

Sei $A \in K^{m \times n}$.

Die folgenden vier Unterräume heißen die Fundamentallräume von A . $A = (s_1, \dots, s_n) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$

$\text{SR}(A) := \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ Spaltenraum

$\text{ZR}(A) := \langle z_1, \dots, z_m \rangle$ Zeilenraum

$\mathbb{L}_0(A) := \{x \in K^n \mid A \cdot x = 0\}$ Nullraum

$\mathbb{L}^0(A) := \{x \in K^{m \times 1} \mid x \cdot A = 0\}$

Es ist

- $\text{SR}(A) \leq K^n$
- $\text{ZR}(A) \leq K^{1 \times m}$
- $\mathbb{L}_0(A) \leq K^n$
- $\mathbb{L}^0(A) \leq K^{1 \times m}$

$\text{Rg}(A) := \dim \text{ZR}(A)$ Rang von A .

Erinnerung

$(\cdot)^t : K^{m \times n} \rightarrow K^{n \times m}, A \mapsto A^t$ ist isomorph, vgl. Beispiel (2.11b).

Insbesondere: $(\cdot)^t : K^m \rightarrow K^{1 \times m}, s \mapsto s^t$

$(\cdot)^t : K^{1 \times n} \rightarrow K^n, z \mapsto z^t$

(2.43) Satz + Beispiel

Für jede $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ gilt:

a) $U \leq V \Rightarrow \varphi(U) \leq W$ **Üb.**

b) $U = \langle M \rangle, M \subseteq V \Rightarrow \varphi(U) = \langle \varphi(M) \rangle$ **Üb.**

c) \mathcal{B} Basis von $U \xRightarrow{(2.40)} \varphi(\mathcal{B})$ Basis von $\varphi(U)$

d) $\dim \varphi(U) = \dim U$

Beispiel Sei $U \leq K^{m \times n}$. $\varphi = (\cdot)^t$

a) $U^t = \{u^t | u \in U\} \stackrel{a)}{\leq} K^{n \times m}$

b) $U = \langle A_1, \dots, A_r \rangle \Rightarrow U^t \stackrel{b)}{=} \langle A_1^t, \dots, A_r^t \rangle$

c) (A_1, \dots, A_r) Basis von $U \Rightarrow \stackrel{c)}{(A_1^t, \dots, A_r^t)}$ Basis von U^t

d) $\dim U^t \stackrel{d)}{=} \dim U$.

(2.44) Folgerung (Zusammenhang zwischen Fundamentalräumen)

$A \in K^{m \times n}$ Es gelten:

a) $\text{SR}(A)^t = \text{ZR}(A^t), \mathbb{L}_0(A)^t = \mathbb{L}^0(A^t)$

$\text{SR}(A^t)^t = \text{ZR}(A), \mathbb{L}_0(A^t)^t = \mathbb{L}^0(A)$

$\text{SR}(A^t) = \text{ZR}(A)^t, \mathbb{L}_0(A^t) = \mathbb{L}^0(A)^t$

$\text{SR}(A) = \text{ZR}(A^t)^t, \mathbb{L}_0(A) = \mathbb{L}^0(A^t)^t$

b) \mathcal{B} Basis von $\text{ZR}(A^t) \stackrel{2.43b)}{\Leftrightarrow} \mathcal{B}^t$ Basis von $\text{SR}(A)$.

\mathcal{B} Basis von $\mathbb{L}_0(A^t) \Leftrightarrow \mathcal{B}^t$ Basis von $\mathbb{L}^0(A)$.

$\dim \text{ZR}(A^t) = \dim \text{SR}(A)$

$\dim \mathbb{L}_0(A^t) = \dim \mathbb{L}^0(A)$

c) Für $x \in K^{1 \times n} : x \in \text{ZR}(A) \Leftrightarrow x^t \in \text{SR}(A^t)$

Für $x \in K^{1 \times m} : x \in \mathbb{L}_0(A) \Leftrightarrow x^t \in \mathbb{L}^0(A^t)$

d) $U^t = \text{SR}(A) \Leftrightarrow U = \text{ZR}(A^t)$

$U^t = \mathbb{L}_0(A) \Leftrightarrow U = \mathbb{L}^0(A^t)$

Beweis von (2.44)a) $\text{SR}(A)^t = \langle s_1, \dots, s_n \rangle^t \stackrel{(2.43b)}{=} \langle s_1^t, \dots, s_n^t \rangle = \text{ZR}(A^t)$

$\mathbb{L}_0(A)^t = \{x \in K^n | A \cdot x = 0\}^t = \{x^t | x \in K^n, \underbrace{A \cdot x = 0}_{x^t \cdot A^t = 0^t = 0}\} = \{x^t | x \in K^n, x^t \cdot A^t = 0\} = \{y | y \in K^{1 \times n}, y \cdot A^t = 0\} =$

$\mathbb{L}^0(A^t)$

(2.45) Satz

$A \in K^{m \times n}$

a) Elementare Zeilentransformationen an A ändern weder $\text{ZR}(A)$ noch $\mathbb{L}_0(A)$.

Übung

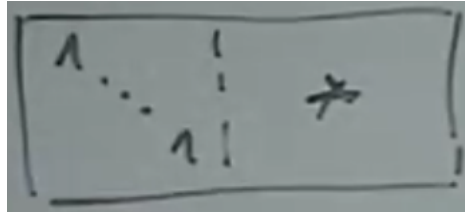
Satz (1.13)

- b) Wenn A in Zeilenstufenform, dann bilden die nicht-Null Zeilen von A eine Basis von $\text{ZR}(A)$. vgl. Beispiel (2.18b)

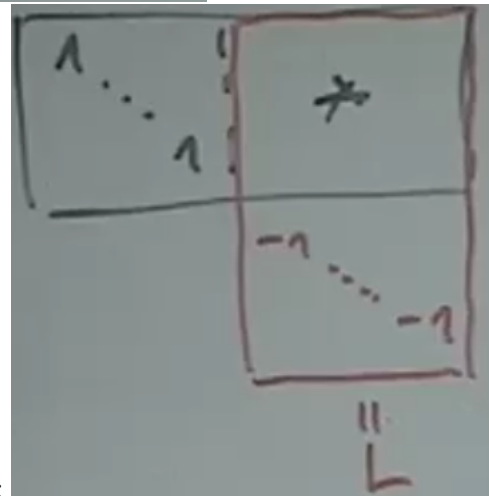
Insbesondere: $\text{Rg } A = \dim \text{ZR}(A) = \# \text{Stufen} = r$.

Folge: #Stufen ist unabhängig von der Zeilenstufenform einer geg. A .

- c) Wenn A in Normalform ist, dann liest man eine Basis von $\mathbb{L}_0(A)$ so ab:



Matrix in Normalform sieht so aus: $A =$



Um die Lösungsmenge abzulesen ergänze (-1)en für *-Spalten:

Die Spalten von L erzeugen $\mathbb{L}_0(A)$.

Die Spalten von L sind l.u. wegen des (-1)-Blocks.

Also: Die Spalten von L bilden eine Basis von $\mathbb{L}_0(A) \Rightarrow \mathbb{L}_0(A) = \text{SR}(L)$.

Insbesondere: $\dim \mathbb{L}_0(A) = n - r = n - \text{Rg } A$

(2.46) Folgerung (Zusammenhang von Dimensionen von Fundamentalräumen)

Sei $A \in K^{m \times n}$.

- a) $\dim \text{SR}(A) = \dim \text{ZR}(A) = \text{Rg } A$

Spaltenrang = Zeilenrang = Rang

- b) $\text{Rg } A = \text{Rg } A^t$

Beweis: Betrachte $\varphi_A : K^n \rightarrow K^m, x \mapsto A \cdot x$

Dann ist $\left. \begin{array}{l} \text{Im } \varphi_A = \text{SR}(A) \\ \text{Ker } \varphi_A = \mathbb{L}_0(A) \end{array} \right\} (2.14b)$

1. $\text{Rg } A := \dim \text{ZR}(A)$

2. $\text{Rg } \varphi_A := \dim(\text{Im } \varphi_A) = \dim \text{SR}(A)$

zu zeigen: $\text{Rg } A = \text{Rg } \varphi(A)$, dann folgt a).

3. Def $\varphi_A := \dim \text{Ker } \varphi_A = \dim \mathbb{L}_0(A) \stackrel{(2.45)}{=} n - \text{Rg } A$.

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Dimensionsformel}}{\Rightarrow} n = \text{Rg } \varphi_A + \text{Def } \varphi_A = \text{Rg } \varphi_A + n - \text{Rg } A \\ &\stackrel{(2.39)}{\Rightarrow} \text{Rg } A = \text{Rg } \varphi_A. \Rightarrow \text{a).} \end{aligned}$$

b) (2.44a) $\text{SR}(A)^t = \text{ZR}(A^t) \Rightarrow \dim \text{SR}(A)^t = \dim \text{ZR}(A^t)$
 $\text{Rg } A = \dim \text{SR}(A) = \dim \text{SR}(A)^t = \dim \text{ZR}(A^t) = \text{Rg } A^t$. □

(2.47) Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$$

Basis + Dimension von $\text{SR}(A)$?

$$\text{SR}(A) = \text{ZR}(A^t)^t, A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$

$$A^t \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim \text{ZR}(A^t) = \text{Rg } A^t = 2$$

$((1 \ 1 \ 1 \ 1), (0 \ 1 \ 2 \ 3))$ Basis von $\text{ZR}(A^t)$

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \text{ Basis von } \text{SR}(A).$$

alternativ: „Spaltentransformationen“ an A bis zur „Spaltenstufenform“.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Spaltenstufenform

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \text{ Basis von } \text{SR}(A).$$

(2.48) Beispiel

K beliebig.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in K^{3 \times 7}$$

Bestimme Basis + Dimension von $\mathbb{L}_0(A)$.

Spaltenvertauschung 3. \leftrightarrow 4. bringt A auf Normalform:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2.45c): $\mathbb{L}_0(\tilde{A}) = \text{SR}(\tilde{L})$

$\dim \mathbb{L}_0(\tilde{A}) = n - \text{Rg } \tilde{A} = 7 - 3 = 4$

$\Rightarrow \mathbb{L}_0(\tilde{A}) = \text{SR}(\tilde{L})$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spalten von L

Spalten von L bilden Basis von $\mathbb{L}_0(\tilde{A})$.

vorher $\mathbb{L}_0(\tilde{A}) = K \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + K \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + K \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + K \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2.49) Bemerkung

Sei $A \in K^{m \times n}, u \in K^m, v \in K^n$

a) $u \in \text{SR}(A) \Leftrightarrow A \cdot x = b$ lösbar

Test „ $u \in \text{SR}(A)$?“ heißt: LGS lösen!

§7 Unterräume von K^n und $K^{1 \times m}$

b) $w \in \mathbb{L}_0(A) \Leftrightarrow A \cdot v = 0$

Test „ $v \in \mathbb{L}_0(A)$?“ heißt: Einsetzen in Multiplikation Matrix \cdot Spalte.

c) **War nicht in der Vorlesung, kommt aus Vorversion des Skriptes, ebenso wie der Beweis**

$v \in \mathbb{Z}R(A) \Leftrightarrow A^t x = v^t$ lösbar (LGS lösen)

Beweis zu c)

$$v \in \mathbb{Z}R(A) \xLeftrightarrow{(\cdot)^t \text{ Isomorphismus}} v^t \in \mathbb{Z}R(A)^t = \mathbb{S}R(A)^t \xLeftrightarrow{a)} A^t x = v^t \text{ lösbar.}$$

Darstellung eines UR als SR, \mathbb{L}_0 ?

U als SR bedeutet: Erzeugendensystem finden.

U als \mathbb{L}_0 bedeutet: beschreibende Gleichung von U zu finden.

(2.50) Satz

Jeder Untervektorraum $U \leq K^m$ ist Spaltenraum einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit $n = \dim U = \text{Rg} A$.

Beweis Wähle eine Basis (u_1, \dots, u_n) von U und trage (u_1, \dots, u_n) in die Spalten von A ein.

(2.51) Hilfsatz

Sei $A \in K^{m \times n}, L \in K^{n \times m}$, dann gilt:

$$\mathbb{L}_0(A) = \mathbb{S}R(L) \Rightarrow \mathbb{L}_0(L^t) = \mathbb{S}R(A^t)$$

Beweis

$$\begin{aligned} \text{„}\subseteq\text{“: } \mathbb{S}R(L) \subseteq \mathbb{L}_0(A) &\Rightarrow A \cdot x = 0 \forall x \in \mathbb{S}R(L) \Rightarrow A \cdot s = 0 \forall \text{ Spalten } s \text{ von } L \Rightarrow A \cdot L = 0 \Rightarrow L^t \cdot A^t = 0^t = 0 \Rightarrow \\ &L^t \cdot s = 0 \forall \text{ Spalten } s \text{ von } A^t \Rightarrow L^t \cdot x = 0 \forall x \in \mathbb{S}R(A^t) \Rightarrow \mathbb{S}R(A^t) \subseteq \mathbb{L}_0(L^t). \end{aligned}$$

$$\mathbb{S}R(L) = \mathbb{L}_0(A) \Rightarrow \text{Rg}(L) = n - \text{Rg}(A) \Rightarrow \text{Rg}(A^t) = \text{Rg}(A) = n - \text{Rg}(L) = n - \text{Rg}(L^t) \Rightarrow \mathbb{S}R(A^t) = \mathbb{L}_0(L^t). \quad \square$$

Einleitung zum weiteren Vorgehen

Normalenform

$$E = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \perp \underbrace{n}_{\text{Normalenvektor}}\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{v * n}_{\text{Skalarprodukt}} = 0\} = \mathbb{L}_0(A) \text{ mit } A = (n_1, n_2, n_3).$$

Vorteile:

- effektiver da A nur 1-zeilig.
- Test „ $x \in E$?“ einfacher.

§7 Unterräume von K^n und $K^{1 \times m}$

Ebene in \mathbb{R}^3 durch 0 (Schule)

Parameterform

$$E = \{\lambda \cdot u + \mu \cdot v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}^3\} = \langle u, v \rangle, \quad u, v \in \mathbb{R}^3$$

$$= \text{SR}(A), \quad \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

Vorteile:

- Basis steht schon da
- einfach Punkte der Ebene zu erzeugen

allgemein $U \leq K^n, \dim U = d$

$$U = \text{SR}(A) \quad U = \mathbb{L}_0(A)$$

$$A \in K^{n \times d} \quad \text{mindestens} \quad A \in K^{(n-d) \times n} \quad \text{mindestens}$$

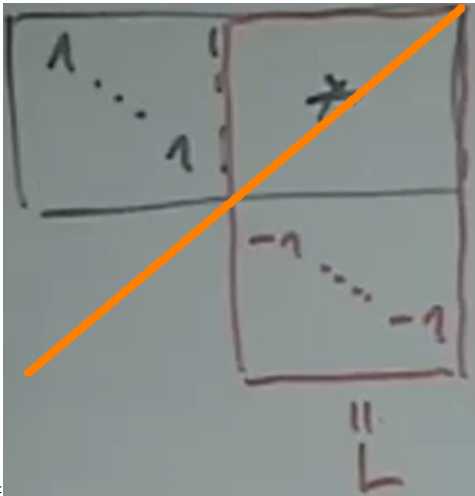
$$\dim \mathbb{L}_0(A) = n - \text{Rg} A, \quad A \in K^{m \times n}$$

$$d = n - (n - d)$$

$$\text{Rg} A \leq m, n$$

$$\text{Rg} A \leq \min\{m, n\}$$

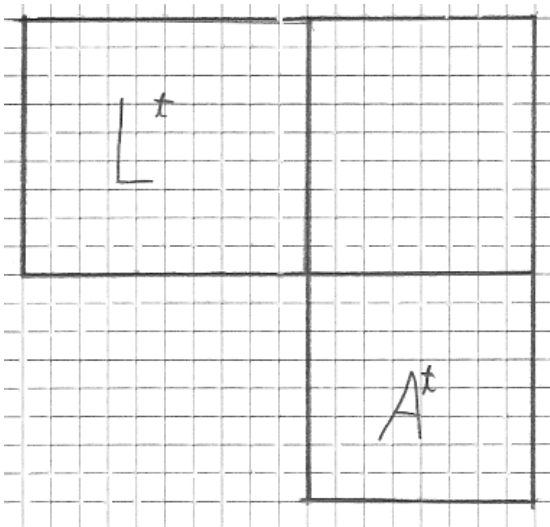
$$A \in K^{m \times n}$$



$$A = \Rightarrow \mathbb{L}_0(A) = \text{SR}(L)$$

Das „Normalform-Verfahren“ bietet Lösung für das Problem „Schreibe einen gegebenen Nullraum (hier $\mathbb{L}_0(A)$) als Spaltenraum (hier $\text{SR}(L)$)“. Wir brauchen die Umkehrung!

Idee: Diagramm Spiegeln



(2.52) Satz

Jeder Unterraum $U \leq K^n$ ist Nullraum $\mathbb{L}_0(A)$ einer Matrix $A \in K^{m \times n}$, wobei $m = n - \dim U = \text{Rg}(A)$

Beweis

1. Schreibe $U = \text{SR}(M)$
2. Setze $L := M^t$ (2.??)
3. Schreibe $\mathbb{L}_0(L) = \text{SR}(B)$ (3.??)
4. Setze $A := B^t$

$$\mathbb{L}_0(M^t) = \text{SR}(B) \xrightarrow{(2.51)} \mathbb{L}_0(B^t) = \text{SR}(M) \Rightarrow \mathbb{L}_0(A) = U$$

(2.53) Beispiel Codierungstheorie

$$K \text{ beliebig, } U \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mid a_1 = a_2 = a_3 \right\} \leq K^3$$

Problem: Finde A mit $U = \mathbb{L}_0(A)$.

$$1. A = \text{SR}(M) \text{ mit } M := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Rg } M = 1$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$2. L := M^t = (1 \quad 1 \quad 1), \quad \text{Rg } L = 1$$

3. $\mathbb{L}_0(L) = ?$, $\dim = 2$
 $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist in Normalform

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B$$

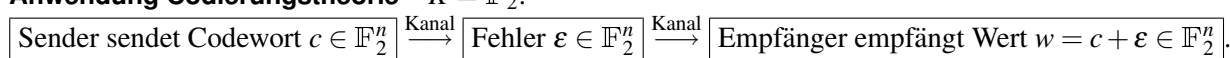
$\Rightarrow \mathbb{L}_0(L) = \text{SR}(B)$, $\text{Rg}(B) = 2$

4. $A := B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in K^{2 \times 3}$

$$U = \mathbb{L}_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a = b = c \right\} \quad A \cdot x = 0$$

Für U haben wir 1 erzeugendes Element bzw. 2 beschreibende Gleichungen (die Zeilen von $A : a = b, a = c$)

Anwendung Codierungstheorie $K = \mathbb{F}_2$.



z.B.

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Annahmen:

- es gehen keine bits verloren
- Fehlerwahrscheinlichkeit „klein“ ($< \frac{1}{2}$)

Ziel:

Empfänger soll Fehler erkennen können bzw. sogar korrigieren können, etwa so:

Für $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird $\begin{pmatrix} (0,0,0) \\ (1,1,1) \end{pmatrix}$ gesendet. (Wiederholungscode)

Bei Empfang von $(0,1,1)$ oder $(1,0,0)$ ist mit Sicherheit ein Fehler aufgetreten.

Aufgabe

Sei n fest. Finde geeignete **Codes** d.h. Teilmengen C von \mathbb{F}_2^n inkl. Kodiervorschrift und Prüfvorschrift.

(2.54) Definition (Codewörter, Generator- und Kontrollmatrix)

Ein UR $C \leq \mathbb{F}_2^n$ heißt (binärer) **linearer Code** der Länge n . Die Elemente von C heißen **Codewörter**. Es gibt $2^{\dim C}$ Codewörter.

$$|C| = 2^k, \quad k = \dim C \text{ (Folgerung (2.41))}$$

Codierung Sender wählt $G \in (\mathbb{F}_2)^{n \times k}$ mit $C = \text{SR}(G)$.

Die Codierungsabbildung ist der Isomorphismus:

$$c: \underset{\substack{k \text{ Bit}}}{\mathbb{F}_2^k} \rightarrow \underset{\substack{n \text{ Bit}}}{C}, v \mapsto G \cdot v$$

c ist Isomorphismus:

$\text{Im}(c) = \text{SR}(G) = C$, d.h. c surjektiv

$\Rightarrow \text{Rg } c = \dim C = k \Rightarrow \text{Def } c = k - \text{Rg } c = 0 \Rightarrow c$ injektiv

G heißt **Generatormatrix**.

Prüfung Empfänger wählt $H \in \mathbb{F}_2^{(n-k) \times n}$ mit $C = \mathbb{L}_0(H)$. Zur Prüfung Empfangswortes $w \in \mathbb{F}_2^n$ wird $H \cdot w$ berechnet.

$H \cdot w = 0 \Rightarrow w \in C \Rightarrow$ (wahrscheinlich) kein Fehler passiert.

$H \cdot w \neq 0 \Rightarrow w \notin C \Rightarrow$ mit Sicherheit Fehler passiert.

H heißt **Kontrollmatrix von C** .

(2.55) Bemerkung (Fehler)

Es bleiben genau die Fehler $\varepsilon \in \mathbb{F}_2^n$ unerkannt, für die $H \cdot \varepsilon = 0$ ist, d.h. sie selbst Codewörter sind.

Beweis Sei $w = c + \varepsilon$.

ε bleibt unentdeckt $\Leftrightarrow H \cdot w = 0 \Leftrightarrow H \cdot (c + \varepsilon) = \underbrace{H \cdot c}_{=0} + H \cdot \varepsilon = 0 \Leftrightarrow H \cdot \varepsilon = 0$

Annahme: 1-fache Fehler am häufigsten.

(2.56) Beispiel

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leq \mathbb{F}_2^3, n = 3, K = \dim C = 1$$

$$C = \text{SR}(G) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel (2.53):

$$C = \mathbb{L}_0(H), H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Erkenne Fehler: alle außer $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Codierung } c : \mathbb{F}_2^1 \rightarrow C, (x) \mapsto G \cdot (x) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

$$\text{Prüfung: } H \cdot w = H \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} 0 \quad w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

(2.57) Satz (Fehler)

Sei C binärer linearer Code mit Kontrollmatrix H .

a) Sind die Spalten von H alle $\neq 0$, so werden alle 1-fachen Fehler erkannt.

Ein Fehler $\varepsilon \in \mathbb{F}_2^n$ heißt 1-fach, wenn $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ genau eine 1 enthält.

b) Sind die Spalten von H paarweise verschieden und $\neq 0$, so können alle 1-fachen Fehler korrigiert werden.

Beweis ε 1-fach $\Rightarrow \varepsilon = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Bit ist gekippt, für ein } i \in \{1, \dots, n\} \quad H \cdot e_i = i\text{-te Spalte von } H.$

a) $H \cdot e_i \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\} \stackrel{(2.55)}{\Rightarrow}$ alle Fehler $\varepsilon = e_i$ werden erkannt.

b) Die Abbildung $f: \underline{n} \rightarrow \mathbb{F}_2^n, \quad \begin{matrix} i \\ \text{Stelle des 1-fachen Fehlers} \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} H \cdot e_i \\ \text{Prüfungsergebnis} \end{matrix}$ ist injektiv. (weil Spalten von H paarweise verschieden).

Also kann man aus dem Prüfungsergebnis $H \cdot e_i$ die Stelle des Fehlers ablesen!

(2.58) Beispiel (Konstruktion von Codes (Hamming-Code))

Wir konstruieren $H \in F_2^{(n-d) \times n}$ Dann $C := \mathbb{L}_0(H)$.

Mit:

- $\text{Rg}(H)$ klein (n groß), dann $|C| = 2^{n-\text{Rg}(H)}$.
- Wähle die Spalten von H paarweise verschieden und $\neq 0$

Beispiel

$$\text{Rg}(H) = 3, \quad H \in \mathbb{F}_2^{3 \times n}, \quad n = 7$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|C| = 2^{7-3} = 2^4 = 16.$$

$C := \mathbb{L}_0(H)$ heißt **Hamming-Code**

Aus Beispiel (xyz?) wissen wir:

$$C = \text{SR}(G), G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nachricht:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F_2^4$$

$$c : v \mapsto G \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^7 \text{ wird gesendet.}$$

Empfangswort:

$$w = c + \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \textcolor{red}{0} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^7, \quad \varepsilon = e_4$$

Prüfung/Korrektur: $H \cdot w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ Fehler passiert. 100 = 4-te Spalte von H (Binärdarstellung, liegt an besondere Konstruktion von H) \Rightarrow Fehler an 4-ter Stelle.

§8 Lineare Abbildungen und Matrizen

Erklärung zu Bezeichnungen

	U, V, W, ...	K-VR (endl.-dim)
Sei K Körper.	$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$	Basen
	$\varphi, \psi, \chi, \dots$	lineare Abbildung
	A, B, C, ...	Matrizen

(2.59) Bemerkung (Basen entsprechen Koordinatensystemen)

Sei $\dim V = n$. Es gibt eine Bijektion $\{\text{Basen von } V\} \leftrightarrow \{\text{Koordinatensysteme von } V\}$

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \mapsto \kappa_{\mathcal{B}} : K^n \rightarrow V, e_i \mapsto v_i$$

\mathcal{B} Basis $\xRightarrow{(2.32)} \kappa_{\mathcal{B}}$: Koordinatensystem. $\mathcal{B}_{\kappa} = (\kappa(e_1), \dots, \kappa(e_n)) \leftarrow \kappa : K^n \rightarrow V$

\mathcal{B} Basis $\xLeftrightarrow{2.40c} \kappa$ Koordinatensystem.

Für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ gilt: $\kappa(x) = \kappa(\sum x_i e_i) = \sum x_i \cdot \kappa(e_i) = \sum x_i \cdot v_i$

(2.60) Satz

Seien V, W K-VR mit fest gewählten Basen \mathcal{A} von V und \mathcal{B} von W , $\dim V = n, \dim W = m$. Zu jedem $\varphi \in \text{Hom}_K(V, W)$ gibt es genau eine Matrix $M \in K^{m \times n}$ mit der Eigenschaft:

$$(*) \quad \forall v \in V : \mathcal{X}_{\mathcal{B}}(\varphi(v)) = M \cdot \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(v)$$

hier bezeichnet $\mathcal{X}_{\mathcal{A}} = \kappa_{\mathcal{A}}^{-1} : V \rightarrow K^n$ die Koordinatenabbildung. $\kappa_{\mathcal{A}} : K^n \rightarrow V, e_i \mapsto v_i, \quad A = (v_1, \dots, v_n)$

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}} : V \rightarrow K^n, v_i \mapsto e_i$$

$$(*) \Leftrightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{B}} \circ \varphi = \varphi_M \circ \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$$

(2.61) Definition (Abbildungsmatrix)

Die Matrix M heißt **Abbildungsmatrix** von φ bzgl. \mathcal{A} und \mathcal{B} , geschrieben M_{φ} bzw. ${}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{A}}$

Beweis von (2.60) Eindeutigkeit: Es gelte (*). Sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$. Für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(v_i) = e_i.$$

Also mit (*)

$$M \cdot e_i = i\text{-te Spalte von } M = \mathcal{X}_{\mathcal{B}}(\varphi(v_i)).$$

$$\text{Existenz: Setze } M := (s_1, \dots, s_n), s_i := \mathcal{X}_{\mathcal{B}}(\varphi(v_i)).$$

Sei $v \in V$ beliebig, etwa $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i, \lambda_i \in K \Rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$

$$M \cdot \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot s_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mathcal{X}_{\mathcal{B}}(\varphi(v_i)) = \mathcal{X}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i)\right) = \mathcal{X}_{\mathcal{B}}\left(\varphi\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i}_{=v}\right)\right) = \mathcal{X}_{\mathcal{B}}(\varphi(v)).$$

□

(2.61.1) Merkregel zum Aufbau der Abbildungsmatrix ${}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{A}}$ einer linearen Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$

In der j -ten Spalte von ${}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{A}}$ stehen die Koordinaten des Bildes des j -ten Basisvektors aus \mathcal{A} bezüglich der Basis \mathcal{B} .

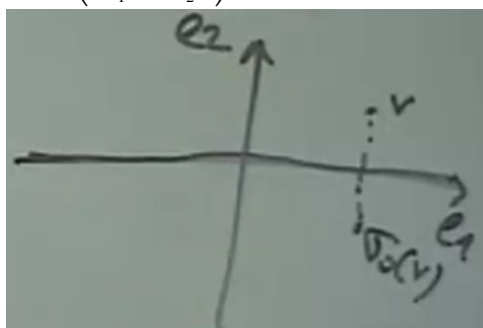
(2.62) Beispiel

Wir bezeichnen mit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$ die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) von K^n .

Dann sind $\kappa_{\mathcal{E}} : K^n \rightarrow K^n$ die Identität.
 $\mathcal{X}_{\mathcal{E}} : K^n \rightarrow K^n$

a) Sei $\sigma_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Spiegelung an e_1 -Achse. Was ist ${}^{\mathcal{E}}M_{\sigma_0}^{\mathcal{E}}$?

$$\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{e_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{e_2} \right)$$



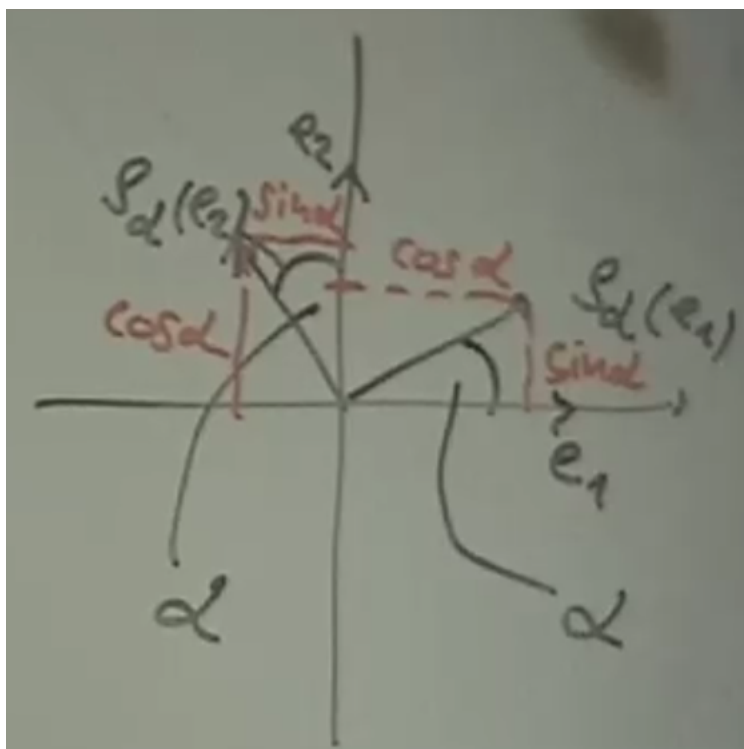
$$\sigma_0(e_1) = e_1 \quad \sigma_0(e_2) = -e_2$$

$$\mathcal{X}_{\mathcal{E}}(\sigma(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X}_{\mathcal{E}}(\sigma(e_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^{\mathcal{E}}M_{\sigma_0}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =: S_0.$$

$$\sigma_0\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = S_0 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

b) Sei $\rho_{\alpha} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Drehung um α gegen den UZS.



Was ist M_{ρ_α} ?

$$\rho_\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\rho_\alpha(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{\rho_\alpha} = {}^{\mathcal{E}}M_{\rho_\alpha}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} =: R_\alpha$$

$$\Rightarrow \rho_\alpha \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = R_\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\dots)$$

c) Sei $\varphi_A : K^n \rightarrow K^m, x \mapsto A \cdot x$ mit $A \in K^{m \times n}$.

$${}^{\mathcal{E}}M_{\varphi_A}^{\mathcal{E}} = A.$$

d) Betrachte $\varphi = \text{id}_V$. Dann ist ${}^{\mathcal{B}}M_{\text{id}_V}^{\mathcal{B}} = E$ (Einheitsmatrix) bzgl. jeder Basis \mathcal{B} von V .

(2.63) Bemerkung

Seien Basen \mathcal{A}, \mathcal{B} von V, W fest gewählt, $\varphi : V \rightarrow W$ linear.

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbb{L}_0(M_\varphi) &= \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\text{Ker } \varphi) \\ \text{Ker } \varphi &= \kappa_{\mathcal{B}}(\mathbb{L}_0(M_\varphi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \text{SR}(M_\varphi) &= \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\text{Im } \varphi) \\ \text{Im } \varphi &= \kappa_{\mathcal{B}}(\text{SR}(M_\varphi)) \end{aligned}$$

$$\text{c) } \text{Rg } \varphi = \text{Rg } M_\varphi.$$

(2.64) Beispiel

Sei $V = \text{Poln}(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$.

V ist \mathbb{R} -VR mit Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ und $\dim_{\mathbb{R}} V = n + 1$.

$\varphi : V \rightarrow W, f \mapsto f'$ (f' = Ableitung)

ist linear. Was ist ${}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$?

$\varphi(x^i) = i \cdot x^{i-1}$ für $1 \leq i \leq n$

$\varphi(1) = 0$

$\varphi(x) = 1$

$\varphi(x^2) = 2 \cdot x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$

$\varphi(x^n) = n \cdot x^{n-1}$

$$\Rightarrow M_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$$

Sei $p = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n \in \text{Poln}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{X}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{X}_{\mathcal{B}}(p') = M_{\varphi} \cdot \mathcal{X}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2 \cdot a_2 \\ 3 \cdot a_3 \\ \vdots \\ n \cdot a_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p' = a_1 \cdot 1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + \dots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + a \cdot x^n.$$

$$\mathbb{L}_0(M_{\varphi}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \text{Ker } \varphi = \langle 1 \rangle = \{a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\} \quad \text{konstante Polynome}$$

$$\text{SR}(M_{\varphi}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \text{Im } \varphi = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle = \{a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{R}\} \quad \text{Polynome grad} \leq n-1.$$

(2.65) Folgerung

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von U, V, W .

Seien $\varphi : V \rightarrow W, \psi : U \rightarrow V$ linear.

a) ${}^{\mathcal{C}}M_{\varphi \circ \psi}^{\mathcal{A}} = {}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}} \cdot {}^{\mathcal{B}}M_{\psi}^{\mathcal{A}}$

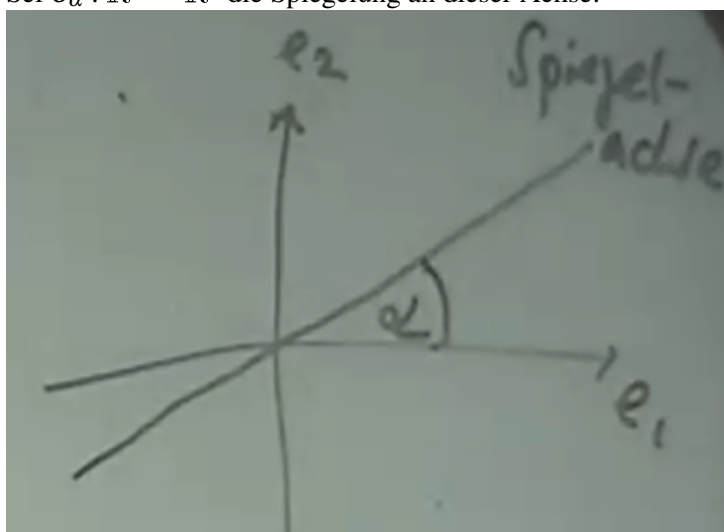
b) Sei $\dim V = \dim W$, also M_{φ} quadratisch.

φ bijektiv $\Leftrightarrow M_{\varphi}$ invertierbar.

In diesem Fall: ${}^{\mathcal{B}}M_{\varphi^{-1}}^{\mathcal{C}} = ({}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}})^{-1}$.

(2.66) Beispiel

a) Sei $\sigma_{\alpha} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an dieser Achse:



Was ist $M_{\sigma_{\alpha}}$?

Schreibe $\sigma_{\alpha} = \rho_{\alpha} \circ \sigma_0 \circ \rho_{-\alpha}$.

$$\stackrel{(2.65a)}{\Rightarrow} M_{\sigma_{\alpha}} = R_{\alpha} \cdot S_0 \cdot R_{-\alpha} = \dots = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha & \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \end{pmatrix} := S_{\alpha}$$

$$\text{z.B. } S_{30^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2.67) Folgerung + Definition

Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} zwei Basen von $V, \dim V = n$. Es gibt genau eine Matrix $T \in K^{n \times n}$ mit der Eigenschaft:

$$\forall v \in V : \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(v) = T \cdot \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(v)$$

bzw.

$$\mathcal{K}_{\mathcal{B}} = \varphi_T \circ \mathcal{K}_{\mathcal{A}}$$

Dieses T wird **Basiswechselmatrix** bzw. **Basistransformationsmatrix** von \mathcal{A} zu \mathcal{B} genannt, geschrieben: ${}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{A}}$.

Es ist ${}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{A}} = {}^{\mathcal{B}}M_{\text{id}_V}^{\mathcal{A}}$ und ${}^{\mathcal{A}}T^{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{A}}M_{\text{id}_V}^{\mathcal{B}} = ({}^{\mathcal{B}}M_{\text{id}_V}^{\mathcal{A}})^{-1} = ({}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{A}})^{-1}$.

(2.67.1) Merkregel zum Aufbau der Basiswechselmatrix ${}^{\mathcal{B}}T_{\varphi}^{\mathcal{A}}$

In der j -ten Spalten von ${}^{\mathcal{B}}T_{\varphi}^{\mathcal{A}}$ stehen die Koordinaten des j -ten Basisvektors aus \mathcal{A} bezüglich der Basis \mathcal{B} .

(2.68) Beispiel

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{E} = (e_1, e_2), \mathcal{B} = \left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right).$$

$$\Rightarrow {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots \\ \mu & \cdots \end{pmatrix} ? \text{ Schreibe: } e_1 = \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2 \text{ (LGS)}$$

$${}^{\mathcal{E}}T^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{E}} = ({}^{\mathcal{E}}T^{\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dots = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{z.B. } v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \mathcal{X}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{X}_{\mathcal{B}}(v) = {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{E}} \cdot \mathcal{X}_{\mathcal{E}}(v) = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Probe: } v = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 \quad \checkmark$$

$$\text{Alternative: } v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} + \mu \cdot \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{ lösen!}$$

(2.69) Basiswechselmatrix

$\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Basen von V , $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von W , $\varphi : V \rightarrow W$ linear.

$${}^{\mathcal{B}'}M_{\varphi}^{\mathcal{A}'} = \underbrace{{}^{\mathcal{B}'}T^{\mathcal{B}}}_{\mathcal{B}'M_{\text{id}_W}} \cdot \underbrace{{}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{A}}}_{\mathcal{B}M_{\varphi}^{\mathcal{A}}} \cdot \underbrace{{}^{\mathcal{A}}T^{\mathcal{A}'}_{\text{id}_V}}_{\mathcal{A}M_{\text{id}_V}}.$$

$$\stackrel{(2.65a)}{=} {}^{\mathcal{B}'}M_{\text{id}_W \circ \varphi \circ \text{id}_V}^{\mathcal{A}'} = {}^{\mathcal{B}'}M_{\varphi}^{\mathcal{A}'}$$

(2.70) Beispiel

$$\text{Sei } \varphi_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Es ist } {}^{\mathcal{E}}M_{\varphi_A}^{\mathcal{E}} = A.$$

Gibt es eine Basis \mathcal{B} von \mathbb{R}^2 mit besonders einfachem ${}^{\mathcal{B}}M_{\varphi_A}^{\mathcal{B}}$?

$$\text{z.B. } \mathcal{B} = \left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right) \text{ aus Beispiel (2.68).}$$

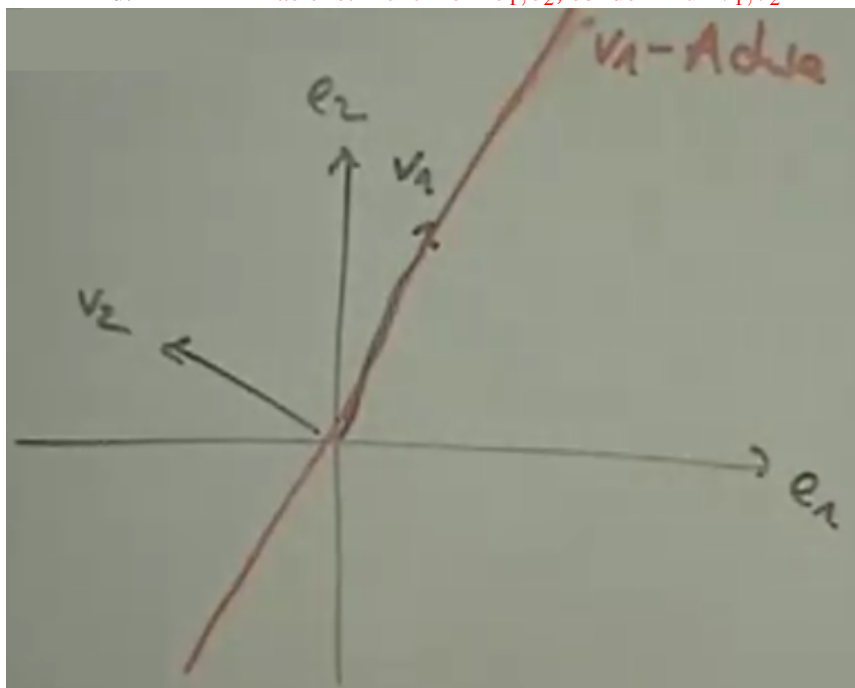
$${}^{\mathcal{A}}T^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{A}} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{E} = (e_1, e_2).$$

§8 Lineare Abbildungen und Matrizen

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{B}}M_{\varphi_A}^{\mathcal{B}} &= {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{E}} \cdot {}^{\mathcal{E}}M_{\varphi_A}^{\mathcal{E}} \cdot {}^{\mathcal{E}}T^{\mathcal{B}} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \\ &\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im Bild: Basis ist nicht mehr e_1, e_2 , sondern nun v_1, v_2



φ_a ist Spiegelung an der v_1 -Achse.

Bemerkung: $m = \dim W, n = \dim V$.

Die Zuordnung $\text{Hom}_K(V, W) \rightarrow K^{m \times n}, \varphi \mapsto {}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{A}}$ ist Bijektion.

Spezialfall: $W = V$.

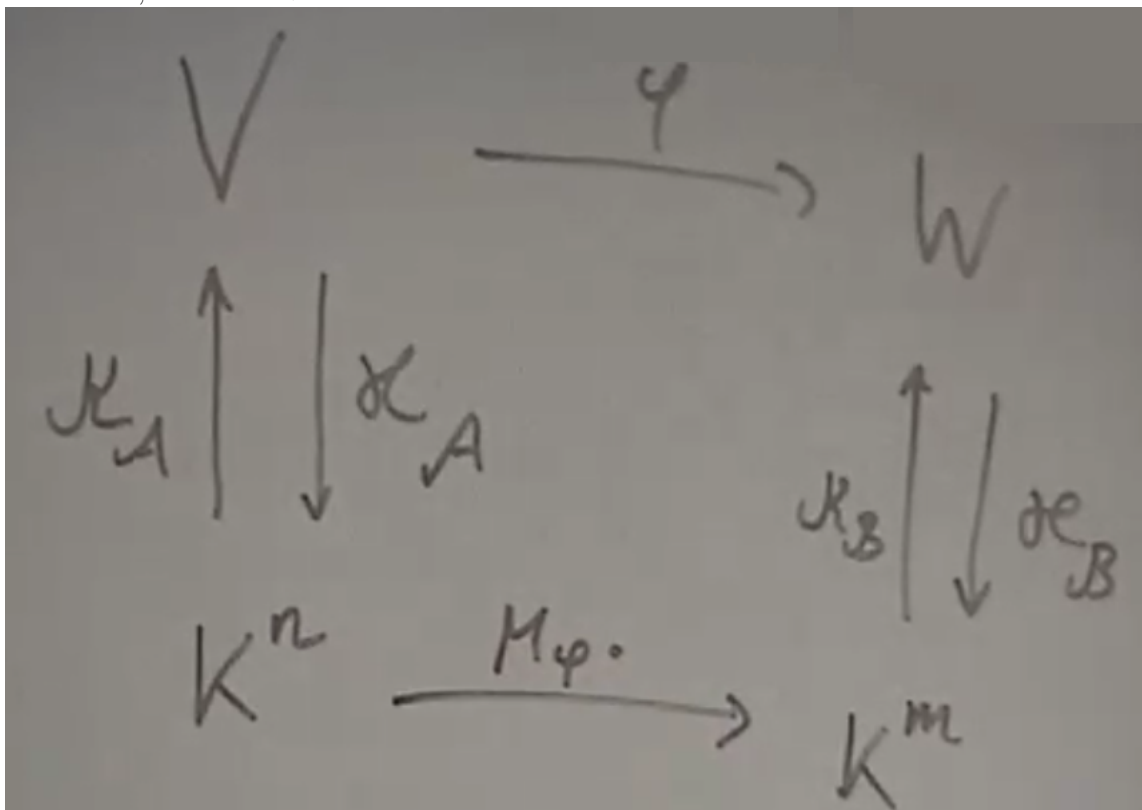
$\text{End}_K(V, V) \rightarrow K^{n \times n}, \varphi \mapsto M_{\varphi}$ Bijektion

$\text{Aut}(V, V) \rightarrow \text{GL}_n(K)$ Bijektion

$\{\varphi: V \rightarrow V \mid \varphi \text{ Isomorphismus}\}$

Einige Beispiele

- $\dim W = m, \dim V = n < \infty$



$$\mathcal{A} = (\kappa_{\mathcal{A}}(e_1), \dots, \kappa_{\mathcal{A}}(e_n))$$

- $V = K^{2 \times 2}, \dim V = 4$

$$\text{Basis ist z.B. } \mathcal{A} = \left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right).$$

$$\underbrace{\mathcal{K}_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v = 2 \cdot v_1 + 7 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4.$$

- $V = K^{2 \times 2}, W = K^{2 \times 2}$

$$\varphi: V \rightarrow W$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a \\ d & -b \end{pmatrix}$$

$$\text{Basis } \mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

siehe Merksatz (2.61.1):

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^{\mathcal{A}}M_{\varphi}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{X}_{\mathcal{A}}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \xrightarrow{M_{\varphi}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ d \\ -b \end{pmatrix} \xleftarrow{\mathcal{X}_{\mathcal{A}}} \begin{pmatrix} 0 & a \\ d & -b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & a \\ d & -b \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. } \text{Rg } M_{\varphi} = 3 \Rightarrow \text{Rg } \varphi = 3$$

$$\Rightarrow \text{Def } \varphi = 4 - 3 = 1$$

(2.70.1) (2.67) Bemerkung (Basiswechsel entsprechen Isomorphismen)

Basiswechsel entsprechen Isomorphismus

$$\underbrace{\mathcal{B}}_{(v_1, \dots, v_n)} \rightsquigarrow \underbrace{\mathcal{B}'}_{v'_1, \dots, v'_n} \xrightarrow{\text{entspricht}} \varphi : V \xrightarrow{\cong} V$$

$$\varphi(v_j) := v'_j (j = 1, \dots, n)$$

$$\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}' \xleftarrow{\text{entspricht}} \varphi : V \xrightarrow{\cong} V$$

$$v'_j = \varphi(v_j)$$

Es gilt dann:

$${}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{B}'} = {}^{\mathcal{B}}M^{\mathcal{B}'} \left(= {}^{\mathcal{B}}M_{id_V}^{\mathcal{B}'} \right)$$

Wdh.

$$\varphi : V \rightarrow W$$

- $\chi_C \varphi(v) = M_{\varphi \chi_{\mathcal{B}}(v)}^{\mathcal{B}}$
- (Basiswechselsatz) ${}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}'} = {}^{\mathcal{C}'}T^{\mathcal{C}} \circ {}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}} \circ {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{B}'}$

(2.70.2) (2.68) Folgerung

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basis von V , $T := {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{B}'}$

1. $\chi_{\mathcal{B}}(v) = T \circ \chi_{\mathcal{B}'}(v)$ bzw. $(T^{-1} = {}^{\mathcal{B}'}T^{\mathcal{B}})$
 $\chi_{\mathcal{B}'}(v) = T^{-1} \circ \chi_{\mathcal{B}}(v)$
2. Sei $\varphi \in \text{Hom}_K(V, V)$ Schreibe $M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$ fuer ${}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$
 $M_{\varphi}^{\mathcal{B}'} = T^{-1} \circ M_{\varphi}^{\mathcal{B}} \circ T$

(2.70.3) (2.69) Beispiel

$$V = \mathbb{R}, B = E = (e_1, e_2), B' = (v'_1, v'_2), v'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T := {}^B T^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} {}^B T^{B'} = {}^B M_{id_V}^{B'}$$

$$T^{-1} = {}^{B'} T^B = \dots = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Sei $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\chi_{B'}(v) = ?$ $\chi_{B'}(v) = T^{-1} \chi_B(v) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \phi := \phi_A, A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, d.h. $\phi_A \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3a+4b \\ 4a+3b \end{pmatrix}$

Bessere Beschreibung von ϕ_A ? z.B. $E \rightsquigarrow B$!

§9 Matrix-Inversion und LU-Zerlegung

Sei K Körper, $A \in K^{n \times n}$.

A invertierbar $A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \varphi_A$ Isomorphismus (bijektiv $x \mapsto Ax$) $\Leftrightarrow \text{Rg}A = n \Leftrightarrow \forall b \in K^n$ ist $Ax = b$ eindeutig lösbar (dann ist $A^{-1}b$ die eindeutige Lösung).

Anwendung der Inversenmatrix:

- Basiswechseln (T^{-1})
- Umkehrabbildung
- ein LGS lösen für viele verschiedenen b ($x = A^{-1}b$)

Invertieren

Finde $B \in K^{n \times n}$ mit $A \cdot B = E_n$.

$AB = E_n \Leftrightarrow$ die j -te Spalte von B ist LGS von $Ax = e_j$ für $j = 1, \dots, n$.

Ansatz: Löse alle $A \cdot x = e_j$ gleichzeitig, etwa so:

$$\left(A \mid E_n \right) \xrightarrow{\text{Gauß}} \underbrace{\left(E_n \mid * \right)}_{\substack{\text{Rg}A=n \\ \text{(Normalform)}}} \underbrace{\quad}_{A^{-1}}$$

denn die j -te Spalte ist Lösung von $Ax = e_j$.

(2.0.4) (2.70) Beispiel

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} T^{-1} = ?$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{|(-2) \\ +}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{|\cdot(\frac{1}{5})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{+} \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right) \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

LU/LR-Zerlegung

deutsch: links-rechts, englisch: lower-upper

Sei $A \in GL_n(K)$ (quadratische, invertierbare Matrix). Betrachte Matrixgleichung der Form
(*) $L \cdot U = A$, wobei $L, U \in GL_n(K)$

z.B. $E_n \cdot A = A$.

(2.0.5) (2.71) Satz

Seien (s_1, \dots, s_n) die Spalten von L und (z_1, \dots, z_n) die Zeilen von U . Folgende Umformungen erhalten die Gleichung (*):

(Typ I) $z_i \rightsquigarrow \lambda z_i, s_i \rightsquigarrow \frac{1}{\lambda} s_i, 0 \neq \lambda \in K, 1 \leq i \leq n$. (\rightsquigarrow = „wird ersetzt durch,“)

(Typ II) $z_i \rightsquigarrow z_i + \lambda z_j, s_j \rightsquigarrow s_j - \lambda s_i, \lambda \in K, 1 \leq i \neq j \leq n$.

A bleibt erhalten. (Vertauschung fürs erste nicht erlaubt).

Anwendung Löse $Ax = b$

1. Löse $Ly = b$

2. Löse $Ux = y$

Dann ist $Ax = L U x = Ly = b$. ($L \cdot U = A$)

(2.0.6) (2.72) Algorithmus (LU/LR-Zerlegung)

$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ Starte mit $E_n \cdot A = A$, d.h. $L = E_n$ und $U = A$, und bringe U durch Umformungen aus Satz (3.71) auf Zeilenstufenform. (genauer: obere „Dreiecksform“, weil $\text{Rg} A = n$) mit Einsen in der Diagonalen (falls die Matrix überhaupt invertierbar ist). Am Ende hat L untere „Dreiecksform“.

(2.0.7) (2.73) Beispiel

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cdot 2 & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 & 2 \end{array} \right) \mid \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} + & \cdot(-3) & & & & \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 & 2 \end{array} \right) \mid \cdot 3 + \\
 &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} + & \cdot 4 & & & & \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 & 2 \end{array} \right) \mid \cdot (-4) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} + & \cdot(-3) & & & & \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right) \mid \cdot 3 + \\
 &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cdot 7 & & & & & \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right) \mid \cdot \frac{1}{7} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=U} = A = L \cdot U
 \end{aligned}$$

Für jeden Schritt gilt, dass der linke Teil der Matrix multipliziert mit dem rechten Teil der Matrix A ergibt.

$$\text{Löse } Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}:$$

$$1. \text{ Löse } Ly = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

§9 Matrix-Inversion und LU-Zerlegung

$$\begin{aligned} 2y_1 &= 2 \Rightarrow y_1 = 1 \\ y_2 &= 3y_1 + 2 \Rightarrow y_2 = 5 \\ 7y_3 &= -4y_1 + 3y_2 + 3 = 14 \Rightarrow y_3 = 2 \end{aligned} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Löse $Ux = y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (Rückwärtssubstitution)

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_2 &= -3x_3 + 5 = -1 \\ x_1 &= -3x_2 - x_3 + 1 = 3 - 2 + 1 = 2 \end{aligned} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2.0.8) (2.74) Bemerkung

$A \in \text{GL}_n(K)$. Löse $Ax = b$ für viele b .

LU-Zerlegung braucht $\approx \frac{1}{3}n^3$ Multiplikationen.

Inversion braucht $\approx \frac{4}{3}n^3$ Multiplikationen.

Für jedes b braucht die LU-Zerlegung $\approx n^2$ Multiplikationen. $2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \approx n^2$

Für jedes b braucht $A^{-1}b$ auch $\approx n^2$ Multiplikationen.

φ_A surjektiv \Leftrightarrow existiert B mit $A \cdot B = E$

Frage: Wie löst man $Ax = b$ für viele b 's wenn $A \in K^{m \times n}$ nicht quadratisch?

Anwendung:

V Nachricht $\in \mathbb{Z}_2^K$

$C = GV$ Codewort $\in \mathbb{Z}_2^n$

Empfänger löst $Gv = c$ für v

(2.0.9) (2.75) Satz

Sei $A \in K^{m \times n}$. Ist φ_A injektiv, so existiert $B \in K^{n \times m}$ mit $B \cdot A = E_n$.

Ist $Ax = b$ lösbar, so ist $B \cdot b$ die eindeutige Lösung.

Beweis:

$$B \cdot A = E_n \Leftrightarrow A^t \cdot B^t = E_n$$

Zeige: existiert $C \in K^{m \times n}$ mit $\underbrace{A^t}_{\in K^{n \times m}} \cdot C = E_n, A^t \in K^{n \times m}$ und wähle $B := C^t$

$$\begin{aligned} c \text{ existiert} &\Leftrightarrow A^t \cdot x = e_j \text{ lösbar } \forall j \\ &\Leftrightarrow \text{Im } \varphi_{A^t} = K^n \\ \varphi_{A^t}: K^m &\rightarrow K^n \\ &\Leftrightarrow \varphi_{A^t} \text{ surjektiv} \\ \varphi_A: K^n &\rightarrow K^m \\ &\Leftrightarrow n = \text{Rg } \varphi_{A^t} = \text{Rg } A^t = \text{Rg } A = \text{Rg } \varphi_A \\ &\Leftrightarrow \text{Def } \varphi_A = n - \text{Rg } \varphi_A = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi_A \text{ injektiv.} \end{aligned}$$

$$Ax = b \Rightarrow x = \underbrace{BA}_{=E_n} x = Bb$$

(2.0.10) (2.76) Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \quad \text{Rg}A = 2 \Rightarrow \varphi_A \text{ injektiv.}$$

Gesucht:

$$B \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \text{ mit } B \cdot A = E_2 \quad A^t \cdot B^t = E_2 \text{ für } B^t \in \mathbb{R}^{3 \times 2}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{|\cdot(-2)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\text{Also } B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \text{ bzw. } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

$$1. \text{ Löse } Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}:$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ (Eindeutige Lösung), Probe: } A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ Löse } Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}:$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ (existiert keine Lösung, da die Probe fehlschlägt)}$$

$$\text{Probe: } A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Teil III

Determinanten und Eigenvektoren

§9 Matrix-Inversion und LU-Zerlegung

$\det : K^{n \times n} \rightarrow K$ ist eine Abbildung mit z.B.

- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ regulär
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Beispiel: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$

§9 Determinanten

R kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}$, $A \in R^{n \times n}$. Seien $A = (s_1, \dots, s_n)$, $s_j \in R^n$ j -te Spalte von A .

(3.1) Definition

Eine Abbildung $D : R^{n \times n} \rightarrow R$ heißt **Determinante**, wenn für alle $1 \leq i, j \leq n$ und $\lambda \in R$ gelte:

$$a) \quad D(\dots, s_j + s'_j, \dots) = D(\dots, s_j, \dots) + D(\dots, s'_j, \dots).$$

$$b) \quad D(\dots, \lambda \cdot s_j, \dots) = \lambda \cdot D(\dots, s_j, \dots)$$

a) und b) zusammen bedeutet, D ist **multilinear**.

$$c) \quad D \text{ ist alternierend: } D(s_1, \dots, s_n) = 0 \text{ falls } \exists i \neq j : s_i = s_j.$$

$$d) \quad D \text{ ist normiert: } D(e_1, \dots, e_n) = D(E_n) = 1.$$

(3.2) Rechenregeln für Determinanten

Sei $D : R^{n \times n} \rightarrow R$ eine Determinante.

$$e) \quad D(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots) = -D(\dots, \underbrace{s_j}_{i\text{-te Spalte}}, \dots, \underbrace{s_i}_{j\text{-te Spalte}}, \dots) \quad \text{für alle } i \neq j.$$

$$f) \quad D(s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}, \dots, s_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn} \pi \cdot D(s_1, \dots, s_n) \quad \forall \pi \in S_n \text{ (also } \pi \text{ ist Permutation).}$$

$$\pi \in S_n. \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstandspare von } \pi} = (-1)^{\text{Anzahl der Transpositionen von } \pi}$$

$$\text{z.B.: } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1 \ 3) \Rightarrow \operatorname{sgn} \pi = (-1)^1 = -1$$

$$g) \quad D(e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, \dots, e_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn} \pi \cdot \underbrace{D(E_n)}_{=1} = \operatorname{sgn} \pi.$$

$$\text{Beweis von (e)} \quad 0 \stackrel{(c)}{=} D(\dots, s_i + s_j, \dots, s_i + s_j, \dots) \stackrel{(a)}{=} D(\dots, s_i, \dots, s_i + s_j, \dots) + D(\dots, s_j, \dots, s_i + s_j, \dots)$$

$$\stackrel{(a)}{=} \underbrace{D(\dots, s_i, \dots, s_i, \dots)}_{=0} + D(\dots, s_j, \dots, s_i, \dots) + D(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots) + \underbrace{D(\dots, s_j, \dots, s_j, \dots)}_{=0} \stackrel{(c)}{=} D(\dots, s_j, \dots, s_i, \dots) +$$

$$D(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots)$$

$$\Rightarrow D(\dots, s_j, \dots, s_i, \dots) = -D(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots).$$

§9 Determinanten

Rechnung Sei D Determinante.

Sei $A = (s_1, \dots, s_n) = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, d.h. $s_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot e_i$

$$\begin{aligned} D(A) &= D(s_1, \dots, s_n) = D\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} \cdot e_{i_1}, s_2, \dots, s_n\right) \\ &\stackrel{(a),(b)}{=} \sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} \cdot D(e_{i_1}, \underbrace{s_2}_{=\sum_{i_2=1}^n a_{i_2,2} \cdot e_{i_2}}, \dots, s_n) \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1,1} \cdot a_{i_2,2} \dots a_{i_n,n} \cdot D(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \end{aligned}$$

$D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \neq 0$ nur falls i_1, \dots, i_n paarweise verschieden sind! D.h. falls $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} := \pi \in S_n$ ist.

Also:

$$\begin{aligned} &\quad \vdots \\ &= \sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n} \cdot D(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}) \\ &\stackrel{(f)}{=} \sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n} \cdot \text{sgn}(\pi). \end{aligned}$$

weitere Regeln:

h) $D(\dots, 0, \dots) = 0$

i) $D(\lambda \cdot A) = D(\lambda \cdot s_1, \dots, \lambda \cdot s_n) = \lambda^n \cdot D(A)$

j) $D(s_1, \dots, \underbrace{s_i + \lambda s_j}_{i\text{-te Spalte}}, \dots, s_n) = D(\dots, s_i, \dots) \forall i \neq j.$

Beweis.

h) $D(\dots, 0, \dots) \underset{\text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}}{=} D(\dots, \lambda \cdot 0, \dots) = \lambda \cdot D(\dots, 0, \dots) \underset{\text{für } \lambda = 0}{=} 0. D(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots) = D(\dots, s_j, \dots, s_i, \dots)$

j) $D(s_1, \dots, \underbrace{s_i + \lambda s_j}_{i\text{-te Spalte}}, \dots, s_n) = D(\dots, \underbrace{s_i}_i, \dots) + \lambda \cdot \underbrace{D(\dots, \overset{i}{s_i}, \dots, \overset{j}{s_j}, \dots)}_{=0} = D(\dots, s_i, \dots).$

weitere Regeln:

k) $\det A = \det A^t \Rightarrow$ auch für Zeilenumformungen erlaubt

l) $\det \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right) = \det B \cdot \det D$

m) $\det A \cdot \det B = \det(A \cdot B)$
 $\det : K^{n \times n} \rightarrow K$ multiplikativ

n) T invertierbar: $\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det T}$
 $\det(T^{-1} \cdot A \cdot T) = \det(A)$
 „ähnliche Matrizen haben gleiche Determinante.“

(3.3) Satz (Leibnitz Formel)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine Determinante, geschrieben $\det : R^{n \times n} \rightarrow R, A \mapsto \det(A) =: |A|$. Es gilt die **Leibnitz-Formel**:

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1),1}, \dots, a_{\pi(i),i} \cdot \operatorname{sgn}(\pi) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n a_{\pi(i),i}$$

(3.4) Beispiel

$n = 1, \det(a) = a.$

a) $n = 2, S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}=-1} \right\}$

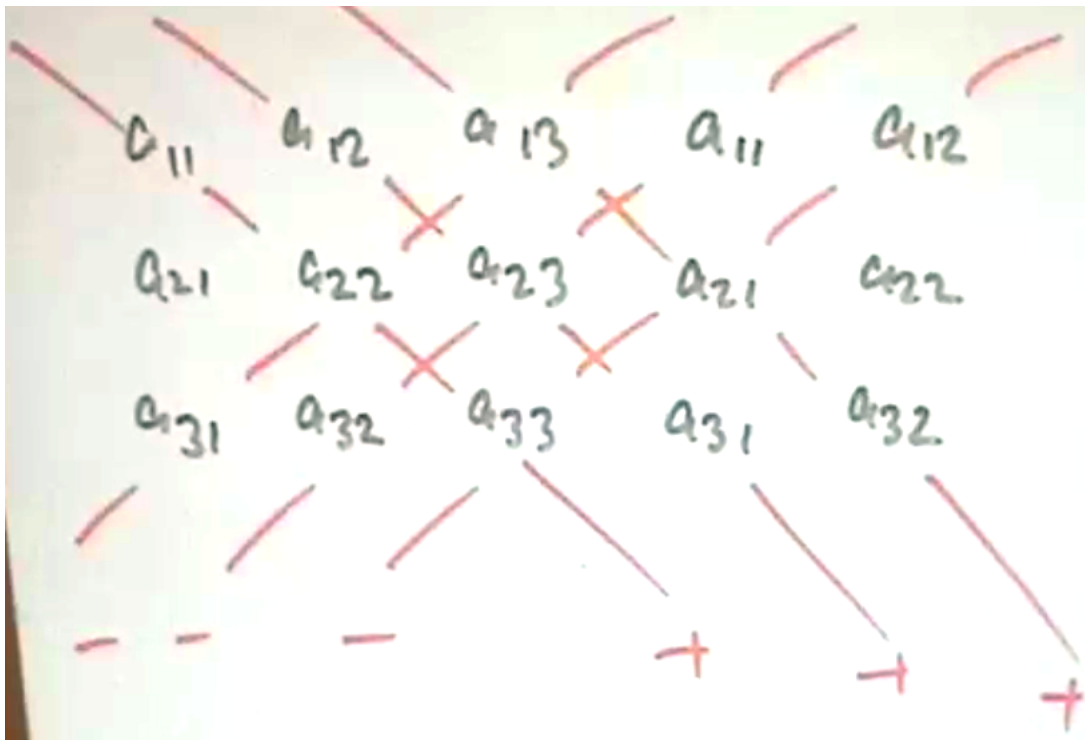
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{21} \cdot a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Schema: Diagonale von links oben nach rechts unten mit positivem Vorzeichen, Diagonale von links unten nach rechts oben mit negativem Vorzeichen.

b) $n = 3, S_3 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}=-1} \right\}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} \\ & - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} \\ & + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} \end{aligned}$$

Regel von Sarrus:(nur 3×3 Matrizen)



Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 0 - (3 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 0) = 5 + (-4) + 0 - (-3 + 0 + 0) = 4.$$

c) n beliebig, A obere Dreiecksmatrix $\in K^{n \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow a_{\pi(1),1}, \dots, a_{\pi(n),n} \neq 0 \text{ nur für } \pi = \text{id}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1}, \dots, a_{\pi(n),n} = a_{11}, \dots, a_{nn} \quad \text{„Produkt der Diagonaleinträge.“}$$

Funktioniert ebenso mit einer unteren Dreiecksmatrix!

d) Determinante mit „Spaltengauß“ berechnen:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \\ -9 & -2 & 5 \end{vmatrix}}_{\mu_1(\frac{1}{3})} \stackrel{(b)}{=} 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix}}_{\tau_{2,3}} \stackrel{(e)}{=} -3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -2 \end{vmatrix}}_{\alpha_{2,1}(2)}$$

$$\stackrel{(j)}{=} -3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 11 & -2 \end{vmatrix}}_{\text{hat „Spaltenstufenform“}} \stackrel{\text{Bsp. c)}}{=} -3 \cdot (1 \cdot (-3) \cdot (-2)) = (-3) \cdot 6 = -18.$$

(3.5) Laplace-Entwicklung + Beispiel

$$A_{i,j} := (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}} \quad \text{i-te Zeile und j-te Spalte „streichen“}$$

heißt **Adjunkte** zu $a_{i,j}$.

Laplace-Entwicklung nach der

- i -ten Zeile ($1 \leq i \leq n$): $\det A = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot A_{i,j}$
i fest
- j -ten Spalte ($1 \leq j \leq n$): $\det A = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \cdot A_{i,j}$
j fest

Vorzeichenschema:

$$\begin{array}{ccccccc} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} +1 & -2 & +3 & -4 \\ -1 & +1 & -0 & +1 \\ +4 & -0 & +3 & -1 \\ -2 & +0 & -1 & +1 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix} \\ &= (-2) \cdot \left(0 \cdot \dots + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \right) - 1 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &= -2 \cdot (3 \cdot (-3) + (-3)) - (2 - 3 \cdot 6 + 4 \cdot (-10)) \\ &= -2 \cdot (-12) - (-56) \\ &= 56 + 24 = 80 \end{aligned}$$

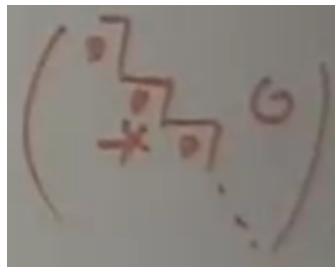
(3.6) Folgerung ($\det = 0$ / $\det \neq 0$)

Sei K Körper, $A \in K^{n \times n}$

- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Rg}(A) = n$.
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Rg}(A) < n \Leftrightarrow Ax = 0$ hat nicht-triviale Lösung.

Beweis Sei A' eine Spaltenstufenform von A .

Dann ist:



- A' untere Dreiecksmatrix
- $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A' = \#$ nicht-Null-Spalten von A'
- $\det A = \lambda \cdot \det A', \lambda \neq 0$

Folglich:

- $\operatorname{Rg} A < n: \Rightarrow a'_{n,n} = 0 \Rightarrow \det A' = a'_{1,1} \cdots a'_{n,n} = 0 \Rightarrow \det A = \lambda \cdot \det A' = 0$.
- $\operatorname{Rg} A = n: \Rightarrow$ alle $a'_{i,i} \neq 0 \Rightarrow \det A' = a'_{1,1} \cdots a'_{n,n} \neq 0 \Rightarrow \det A = \underset{\neq 0}{\lambda} \cdot \underset{\neq 0}{\det A'} \neq 0$

(3.7) Definition (ähnlich)

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen **ähnlich**, wenn $T \in GL_n(K)$ existiert mit

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

.

(3.8) Satz (Cramer'sche Regel und Adjunktenformel)

Sei $A \in GL_n(K), b \in K^n, A = (s_1, \dots, s_n), s_i \in K^n$.

a) Cramer'sche Regel:

Die eindeutige Lösung von $A \cdot x = b$ lautet $x = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ wobei

$$c_j := \frac{1}{\det A} \cdot \det(s_1, \dots, \underset{\uparrow j}{b}, \dots, s_n)$$

b) Adjunktenformel: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{i,j})^t$.

Beweis

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = b &\Rightarrow b = \sum_{i=1}^n s_i \cdot c_i \\
 &\Rightarrow \det(s_1, \dots, \underset{\uparrow j}{b}, \dots, s_n) \\
 &\stackrel{\text{(a),(b)}}{=} \sum_{i=1}^n c_i \cdot \underbrace{\det(s_1, \dots, \underset{\uparrow j}{s_i}, \dots, s_n)}_{=0 \text{ falls } i \neq j} \\
 &= c_j \cdot \det(s_1, \dots, \underset{\uparrow j}{s_j}, \dots, s_n) = c_j \cdot \det(A).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } (i, j)\text{-Eintrag von } A^{-1} &= i\text{-Eintrag einer Lösung von } A \cdot x = e_j \\
 &\stackrel{\text{a)}}{=} \frac{1}{\det A} \cdot \det(s_1, \dots, \underset{j}{e_j}, \dots, s_n) \\
 &\stackrel{\text{Laplace}}{=} \frac{1}{\det A} \cdot A_{i,j}
 \end{aligned}$$

□

Vorteile

1. Rechnung ohne Brüche (häufig).
2. Keine Fallunterscheidungen nötig bei Parametern.

(3.9) Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

$$\det A = 8 + 1 - 1 - 2 + 2 - 2 = 6.$$

$$\text{a) Löse } A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{0} & 2 & 1 \\ \boxed{1} & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$$

$$c_2 = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (-2) = -\frac{1}{3}$$

$$c_3 = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0$$

$$\text{Also ist } x = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ die eindeutige Lösung.}$$

$$\text{b) } A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Erinnerung

Die Polynome über K bilden den Polynomring $K[x]$.

$K[x] = \{a_0 + a_1 \cdot x + \dots + x_n \cdot x^n \mid \text{alle } a_i \in K, n \in \mathbb{N}_0\}$

$M \in K[x]^{n \times n} \Rightarrow \det M = \underbrace{K[x]}_{\text{Polynom}}$

Einträge sind Polynome

(3.10) Definition (charakteristisches Polynom)

Sei $A \in K^{n \times n}, A = (a_{i,j})$

Man nennt

$$\underbrace{\det(x \cdot E - A)}_{\in K[x]^{n \times n}} = \det \begin{pmatrix} \boxed{x - a_{1,1}} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ & \boxed{x - a_{2,2}} & & \\ & & \ddots & \\ -a_{n,1} & \dots & & \boxed{x - a_{n,n}} \end{pmatrix}$$

$\in K[x]$

das **charakteristische Polynom** von A , geschrieben $\chi_A(x)$.

(3.11) Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & 1 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= (x-2)^3 - 1 + 1 - (x-2) + (x-2) - (x-2) = (x-2)^3 - (x-2) = (x-2) \cdot ((x-2)^2 - 1) = (x-2) \cdot (x^2 - 4 \cdot x + 3) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6$$

(3.12) Bemerkung

$A \in K^{n \times n}$

Es ist $\deg \chi_A(x) = n$, $a_{n-1} = -\sum_{i=1}^n a_{i,i}$, $a_0 = (-1)^n \cdot \det A$

$a_{i,i}$ meint den Eintrag der Matrix A in der i -ten Zeile und i -ten Spalte, a_i meint den i -ten Koeffizienten des Polynoms

(3.13) Satz

Ähnliche Matrizen aus $K^{n \times n}$ haben das gleiche charakteristische Polynom.

$$\chi_A = \det(x \cdot E - A)$$

Beweis Seien $A, B \in K^{n \times n}$ ähnlich, etwa $B = T^{-1} \cdot A \cdot T, T \in \text{GL}_n(K)$.

Dann gilt in $K[x]^{n \times n}$:

$$x \cdot E - B = x \cdot (T^{-1} \cdot E \cdot T) - (T^{-1} \cdot A \cdot T)$$

$$= T^{-1} \cdot x \cdot E \cdot T - T^{-1} \cdot A \cdot T$$

$$= T^{-1} \cdot (x \cdot E - A) \cdot T$$

$$\Rightarrow \chi_B = \det(x \cdot E - B) \stackrel{(n)}{=} \det(x \cdot E - A) = \chi_A$$

□

(3.14) Beispiel + Definition

Sei $\varphi \in \text{End}_K(V)$ und $A = {}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$ für eine Basis \mathcal{B} von V .

Dann sind $\det A$ und χ_A unabhängig von der Wahl von \mathcal{B} .

Grund: ${}^{\mathcal{B}'}M_{\varphi}^{\mathcal{B}'} = T^{-1} \cdot {}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}} \cdot T$ mit $T^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{B}'} \in \text{GL}_n(K)$.

${}^{\mathcal{B}'}M_{\varphi}^{\mathcal{B}'}$ ist ähnlich zu ${}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$

Wir setzen:

$$\det \varphi := \det M_{\varphi}$$

$$\chi_{\varphi} := \chi_{M_{\varphi}}$$

Einleitung und Wiederholung zum nächsten Teil

$$\text{Hom}_K(V, W) = \{\varphi : V \rightarrow W \mid \varphi \text{ linear}\}$$

$$(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x)$$

$$(\lambda \cdot \varphi)(x) := \lambda \varphi(x)$$

$$K^M := \{M \rightarrow K\} \text{ ist K-VR.}$$

$$\text{i) } M_{\varphi+\psi} = M_{\varphi} + M_{\psi}$$

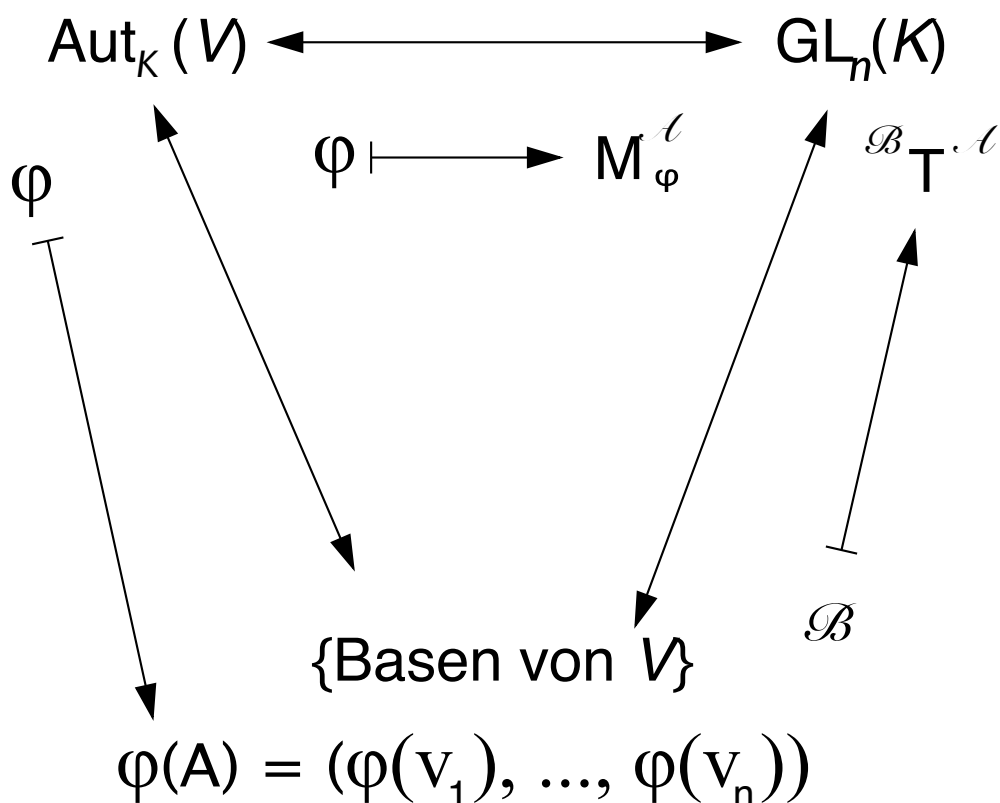
$$\text{ii) } M_{\lambda \cdot \varphi} = \lambda \cdot M_{\varphi}$$

$$\text{End}_K V = \{\varphi : V \rightarrow V \mid \varphi \text{ linear}\}$$

$$M_{\varphi}^{\mathcal{A}} := {}^{\mathcal{A}}M_{\varphi}^{\mathcal{A}}$$

$$\text{Aut}_K(V) := \{\varphi \in \text{End}_K V \mid \varphi \text{ bijektiv}\}$$

Haben Bijektionen: (Basis \mathcal{A} fest)



Es gilt: $M_\varphi^{\mathcal{A}} = (\varphi^{\mathcal{A}} T^{\mathcal{A}})^{-1}$.

Beweis: $\varphi^{\mathcal{A}} T^{\mathcal{A}} \cdot M_\varphi^{\mathcal{A}} = \varphi^{\mathcal{A}} M_{\text{id}}^{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{A} M_\varphi^{\mathcal{A}} = \varphi^{\mathcal{A}} M_\varphi^{\mathcal{A}} = E$.

Interpretation	Objektbewegung	vs.	Kamerabewegung
	Isomorphismus	vs.	Basiswechsel

Folgerung:

1. Die Abbildungsmatrizen einer linearen Abbildung bzgl. verschiedener Basen sind ähnlich zueinander.
2. Ähnliche Matrizen beschreiben dieselbe lineare Abbildung bzgl. verschiedener Basen.

zu 2. Sei $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$. Sei $T^{-1} = {}^B T^{\mathcal{A}}$. Sei $\varphi \in \text{End}_K(V)$ mit $M_\varphi^{\mathcal{A}} = A$
 $\Rightarrow B = {}^B T^{\mathcal{A}} \cdot M_\varphi^{\mathcal{A}} \cdot T^{\mathcal{B}} = {}^B M_\varphi^{\mathcal{B}} = M_\varphi^{\mathcal{B}}$.

Einführung zu Eigenwerten

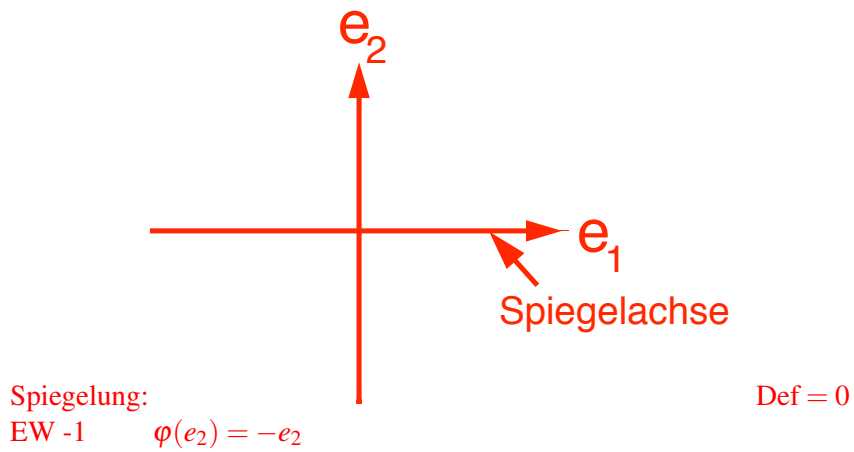
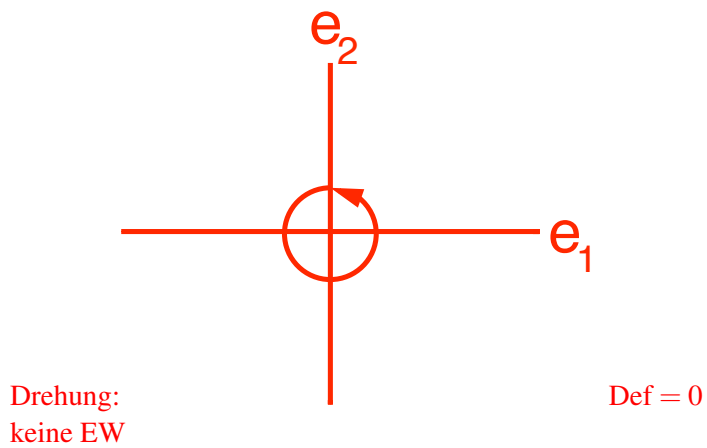
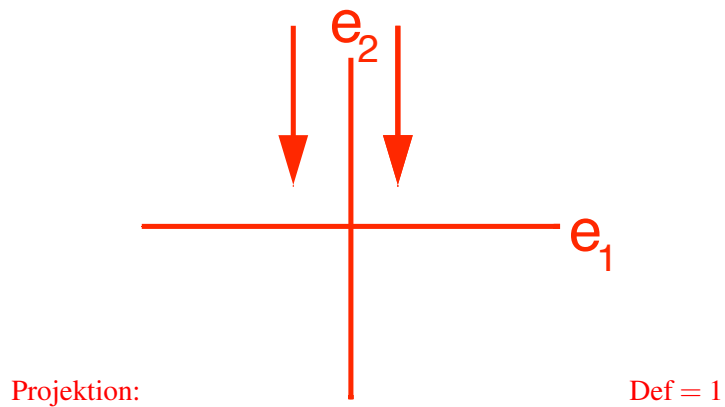
Qualitative Merkmale von $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$

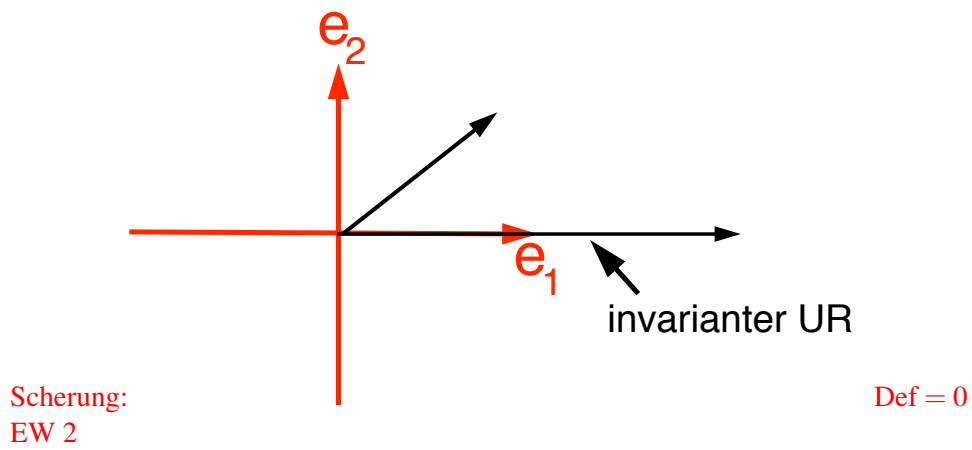
Def $\varphi = \dim \text{Ker } \varphi$ $\varphi(v) = 0$

Fixpunkte $\varphi(v) = v$

Eigenwerte $\varphi(v) = \lambda \cdot v$ λ Eigenwert

invariante Unterräume





§10 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei K Körper, V endlich dimensionaler K -VR, $\varphi \in \text{End}_K(V) = \{\varphi : V \rightarrow V \text{ linear}\}, A \in K^{n \times n}$.

(3.14) Definition (Eigenwert, -raum, -vektor)

Sei $c \in K$.

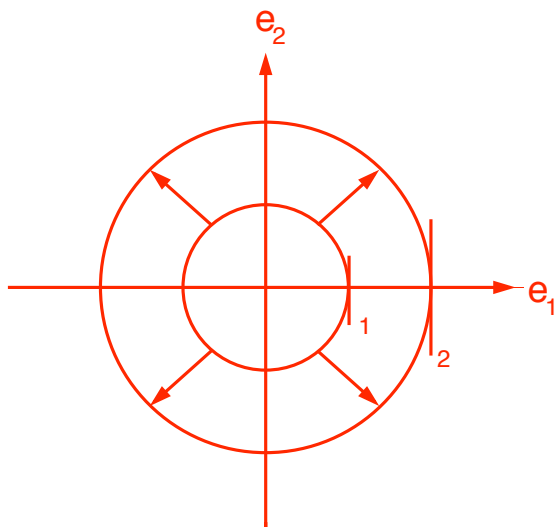
$$V(c, \varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = c \cdot v\} \supseteq \{0\}$$

$$V(c, A) := \underbrace{\{v \in K^n \mid A \cdot v = c \cdot v\}}_{=V(c, \varphi_A)} \supseteq \{0\}$$

c heißt **Eigenwert** (EW) von $\begin{cases} \varphi \\ A \end{cases}$ wenn $\begin{cases} V(c, \varphi) \neq \{0\} \\ V(c, A) \neq \{0\} \end{cases}$

Wenn c Eigenwert ist, so heißt $V(c, \varphi)$ bzw. $V(c, A)$ der **Eigenraum** von φ bzw. von A zum Eigenwert c . Die Vektoren $\neq 0$ aus $V(c, \varphi)$ und $V(c, A)$ heißen **Eigenvektoren** (EV) von φ bzw. von A zum Eigenwert c .

Beispiel:



EW 2

$$V(2, \varphi) = \mathbb{R}^2$$

Erinnerung: Für beliebige K -VR V, W ist $\text{Hom}_K(V, W)$ (also insbesondere $\text{End}_K(V)$) ein K -VR mit $+$, \cdot (skalare Multiplikation) definiert durch:

- $(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x)$
- $(\lambda \cdot \varphi)(x) := \lambda \cdot \varphi(x)$

$$\forall \lambda \in K, \varphi, \psi \in \text{Hom}_K(V, W).$$

(3.15) Bemerkung

$\varphi \in \text{End}_K(V)$, $A \in K^{n \times n}$, $c \in K$.

a) Ist $A = M_\varphi^{\mathcal{A}}$ so gilt:

$$V(c, \varphi) = \kappa_{\mathcal{B}}(V(c, A)) \text{ bzw.}$$

$$\mathcal{X}_{\mathcal{B}}(V(c, \varphi)) = V(c, A).$$

b) $V(c, A) = \mathbb{L}_0(A - c \cdot E_n) \leq K^n$
 $V(c, \varphi) \leq V$

c) 1 EW von $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ hat nicht-triviale Fixpunkte

d) 0 EW von $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ hat nicht-trivialen Kern

$$\text{zu b) } x \in V(c, A) \Leftrightarrow A \cdot x = c \cdot x$$

$$\Leftrightarrow A \cdot x - c \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow A \cdot x - (c \cdot E) \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - c \cdot E) \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow (c \cdot E - A) \cdot x = 0$$

(3.16) Satz

Sei $A \in K^{n \times n}$, $c \in K$.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

i) c ist EW von A

ii) $A \cdot x = c \cdot x$ ist nicht-trivial lösbar

iii) $\mathbb{L}_0(A - c \cdot E) \neq \{0\}$

iv) $\text{Rg}(A - c \cdot E) < n$

v) $\det(A - c \cdot E) = 0$

v' $\det(c \cdot E - A) = 0$

vi) $\chi_A(c)$, d.h. c ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A . $\chi_A = \det(x \cdot E - A)$

Exkurs zu Nullstellen in Polynomen

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n \in K[x]$$

$$a \in K$$

$$f(a) := a_0 + a_1 \cdot a + \dots + a_n \cdot a^n \quad \text{Einsetzen}$$

$K[x]$ ist Polynomring und K -Vektorraum.

$a \in K$ fest.

$\tau_a : K[x] \rightarrow K, f \mapsto f(a)$ ist der **Einsetzungshomomorphismus** (und Vektorraumhomomorphismus und Ringhomomorphismus).

Prüfe:

$$\text{i) } \tau_a(f+g) = \tau_a(f) + \tau_a(g)$$

$$\text{ii) } \tau_a(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \tau_a(g)$$

$$\text{iii) } \tau_a(f \cdot g) = \tau_a(f) \cdot \tau_a(g)$$

$$\text{(i)} \Leftrightarrow (f+g)(a) = f(a) + g(a) \quad \checkmark$$

$$\text{(ii)} \Leftrightarrow (\lambda \cdot f)(a) = \lambda \cdot f(a) \quad \checkmark$$

$$\text{(iii)} \Leftrightarrow (f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a) \quad \checkmark$$

Bemerkung: Sei $M = K[x]^{n \times n}$, $M = (m_{i,j})$, $m_{i,j} \in K[x]$, $c \in K$.

$$\det M \in K[x] \quad M(c) := (m_{i,j}(c)) \in K^{n \times n}$$

$$(\det M)(c) = \det(M(c)) \in K$$

$$(\det M)(c) = \underbrace{\left(\sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n \underbrace{m_{\pi(i),i}}_{\in K[x]} \right)}_{\in K[x]}(c) = \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \left(\prod_{i=1}^n m_{\pi(i),i}(c) \right)$$

(3.17) Definition

Ist $c \in K$ eine k -fache Nullstelle von χ_A bzw. χ_φ , so wird c **k-facher Eigenwert** von χ_A bzw. χ_φ genannt.

Folge: $A \in K^{n \times n}$ hat höchstens n Eigenwerte.

(3.18) Beispiel:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ hat keine EW, denn $\chi_A = x^2 + 1$ hat keine 0-Stellen in \mathbb{R} . (vgl. genaue Interpretation der Drehung um 90° im UZS)

b) obere Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ hat EW } a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$$

$$\chi_A \underset{\text{(Bsp. 3.4c)}}{=} (x - a_{1,1}) \cdot (x - a_{2,2}) \cdots (x - a_{n,n})$$

c) Ähnliche Matrizen haben gleiche EW, weil sie gleiche charakteristische Polynome (Satz (3.13)) haben, aber im Allgemeinen **nicht** die gleichen EV oder ER.

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

$$\text{aus Bsp. (3.11): } \chi_A = (x-2) \cdot (x^2 - 4 \cdot x + 3) = (x-2) \cdot (x-1) \cdot (x-3)$$

also lauten die EW: 1, 2, 3 (jeweils 1-fach)

§10 Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenräume:

löse dazu $\mathbb{L}_0(A - c \cdot E_3)$

$$c = 1: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(1, A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$c = 2: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V(2, A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$c = 3: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Spalten vertauschen}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{zurück tauschen}} \Rightarrow V(3, A) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ (vgl. a))

$$\chi_A = x^2 + 1 = (x - i) \cdot (x + i)$$

EW: $i, -i$

$$V(-i, A): \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow V(-i, A) = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V(i, A): \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow V(i, A) = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

f) $V = \mathbb{R}^3$ mit Basis (e_1, e_2, e_3)

$$\text{Spiegelung an } e_2, e_3\text{-Ebene hat Matrix } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EW: $-1, 1$

Eigenräume:

$\langle e_1 \rangle$ ER zu -1

$\langle e_2, e_3 \rangle$ ER zu 1

allgemeine Spiegelung

(3.19) Definition + Bemerkung

Sei $\dim V = n$, $\varphi \in \text{End}_K(V)$ und $1 \neq -1$ in K . φ heißt die **Spiegelung**, falls gilt:

i) -1 ist EW von φ

ii) $\dim_K V(1, \varphi) = n - 1$

φ ist Spiegelung an $V(1, \varphi)$, der Spiegelungshyperebene

Bem.: Sei φ eine Spiegelung, $0 \neq v_1 \in V(-1, \varphi)$ und (v_2, v_3, \dots, v_n) eine Basis von $V(1, \varphi)$.

Wegen $\varphi(v_1) = -v_1 \neq v_1$ ist $v_1 \notin V(1, \varphi) \Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ l.u. und eine Basis von V . Die Matrix von φ bzgl. (v_1, \dots, v_n) lautet

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & & \dots & 0 \\ & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

Besonderheit:

- M_φ ist Diagonalmatrix
- (v_1, v_2, \dots, v_n) ist Basis aus Eigenvektoren

(3.20) Satz + Definition

Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Basen von V , $\varphi \in \text{End}_K(V)$, $A = M_\varphi^{\mathcal{A}}$ und $T = {}^{\mathcal{A}}T^{\mathcal{B}} \in \text{GL}_n(K)$

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

Seien $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $T = (s_1, \dots, s_n), c_1, \dots, c_n \in K$

i) \mathcal{B} besteht aus EV von φ ($\varphi(v_i) = c_i \cdot v_i$)

ii) alle Spalten von T sind EV von A ($A \cdot s_i = c_i \cdot s_i$)

iii) $T^{-1} \cdot A \cdot T$ ist Diagonalmatrix ($T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}$)

b) \mathcal{A} besteht aus EV von $\varphi \Leftrightarrow A$ ist Diagonalmatrix

c) V besitzt Basis aus EV von $\varphi \Leftrightarrow A$ ähnlich zu Diagonalmatrix

In diesem Fall heißt φ bzw. A **diagonalisierbar**.

Beweis Sei $\dim V = n$

a) Es gilt $s_i = \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(v_i)$ nach Def. (2.67) von ${}^{\mathcal{A}}T^{\mathcal{B}}$.

(i) \Leftrightarrow (ii) Wir haben $1 \leq i \leq n$:

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\varphi(v_i)) = M_\varphi^{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(v_i) = A \cdot s_i$$

und

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(c \cdot v_i) = c \cdot \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(v_i) = c \cdot s_i \quad (c \in K)$$

$$\text{also } \varphi(v_i) = c \cdot v_i \Leftrightarrow A \cdot s_i = c \cdot s_i$$

Das zeigt (i) \Leftrightarrow (ii)

b) Wähle speziell $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ d.h. $T = E_n$. Nach a) (i) \Leftrightarrow (ii) gilt:

\mathcal{A} besteht aus EV von $\varphi \Leftrightarrow$ alle Spalten von E sind EV von A

\Leftrightarrow alle e_i sind EV von $A \quad 1 \leq i \leq n$

$\Leftrightarrow A$ hat die Form $\begin{pmatrix} c_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}$

a) (i) \Leftrightarrow (iii):

Nach (b) angewendet auf \mathcal{B} statt \mathcal{A} , gilt:

\mathcal{B} besteht aus EV von $\varphi \Leftrightarrow {}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$ Diagonalmatrix.

Wegen ${}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{A}} \cdot {}^{\mathcal{A}}M_{\varphi}^{\mathcal{A}} \cdot T^{\mathcal{B}} = T^{-1} \cdot A \cdot T$ folgt die Behauptung.

c) folgt sofort aus (i) \Leftrightarrow (iii) von a) wegen der bijektiven Zuordnung

$\{ \text{Basen von } V \} \mapsto \text{GL}_n(K)$

$\mathcal{B} \mapsto {}^{\mathcal{A}}T^{\mathcal{B}}$

(bei festem \mathcal{A})

(3.21) Beispiel

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ ist diagonalisierbar.

Wir verifizieren die 3 Aussagen aus Satz (3.20a):

i) gemäß Bsp. (3.18d) besteht die Basis

$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ von \mathbb{Q}^3 sämtlich aus EV von A , zu EW 1,2,3.

(verzichten auf Prüfung der l.u. von b_1, \dots, b_3)

ii) Es ist $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(K)$ und die Spalten sind EV von A zu den EW 1,2,3.

iii) Es ist $T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Die Diagonaleinträge von $T^{-1} \cdot A \cdot T$ sind EW von A ! (Reihenfolge beachten!!!)

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$ ist nicht diagonalisierbar (über keinem Körper!)

Wegen $\chi_A = (x-1)^2$ ist $c = 1$ der einzige Eigenwert.

Wenn A diagonalisierbar wäre, gäbe es nach Satz (3.20) ein $T \in \text{GL}_n(K)$ mit $T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$

Daraus folgt aber, dass

$A = T \cdot E_2 \cdot T^{-1} = T \cdot T^{-1} = E_n \not\equiv$, da $1 \neq 0$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$ nicht diagonalisierbar für $K = \mathbb{R}$:

Wegen $\chi_A = x^2 + 1$ hat A keine EW in \mathbb{R} und somit kein EV. Also kann es auch keine Basis aus EV geben.

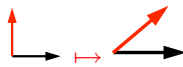
§10 Eigenwerte und Eigenvektoren

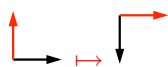
diagonalisierbar $K = \mathbb{C}$:

gemäß Bsp. (3.18c) besteht die Basis $\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ aus EV zu EW $i, -i$. Also gilt:

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \text{ für } T = \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

geometrische Interpretation für $K = \mathbb{R}$:

b) ist Scherung 

c) ist Drehung um 90° im UZS 

Für beides gibt es keine Basis von \mathbb{R}^2 aus EV

Zwischenfrage/Motivation

I. Warum Basis aus Eigenvektoren?

1. Abbildungsmatrix ist Diagonalmatrix \rightarrow leichteres Rechnen

$$\text{(z.B. Potenzmatrix: } D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^i = \begin{pmatrix} d_1^i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n^i \end{pmatrix})$$

2. Es ist natürlich, so vorzugehen (im geometrischen Kontext). Hat man z.B. einen 3-dimensionalen Raum mit immanenten Bewegungen (lineare Abbildung), etwa die Erdkugel mit Rotation um die Erdachse, dann versucht man, möglichst viele Koordinatenachsen (also Basisvektoren) in die Eigenräume der Bewegung zu legen, etwa eine Achse in die Erdachse.

(3.22) Satz

Seien c_1, \dots, c_n paarweise verschiedene Eigenwerte von $A \in K^{n \times n}$. Aus jedem ER $V(c_i, A)$ seien n_i l.u. Vektoren $(v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)})$ gewählt. Dann ist $(v_1^{(1)}, \dots, v_{n_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_{n_2}^{(2)}, \dots, v_{n_m}^{(m)})$ l.u.

Beweis Induktion nach m

$m = 1$ ist klar.

$m > 1$, Ind. Vor.: $(v_1^{(1)}, \dots, v_{n_{m-1}}^{(m-1)})$ l.u.

Sei $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \cdot v_j^{(i)} = 0$. Zeige, dass $\lambda_{i,j} = 0$

§10 Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\begin{aligned}
 0 &= (A - c_m \cdot E) \cdot 0 \\
 &= (A - c_m \cdot E) \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \cdot v_j^{(i)} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \cdot \left(\underbrace{A \cdot v_j^{(i)}}_{=c_j \cdot v_j^{(i)} \text{ weil } v_j^{(i)} \in V(c_i, A)} - c_m \cdot v_j^{(i)} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \cdot \underbrace{(c_i - c_m)}_{=0 \text{ für } i=m} \cdot v_j^{(i)} \\
 &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \cdot (c_i - c_m) \cdot v_j^{(i)} \\
 \text{Induktionsvoraussetzung} \Rightarrow & \lambda_{i,j} \cdot \underbrace{(c_i - c_m)}_{\neq 0} = 0 \quad \forall i < m \\
 \Rightarrow & \lambda_{i,j} = 0 \quad \forall i < m \\
 \Rightarrow & \sum_{j=0}^{n \cdot m} \lambda_{m,j} \cdot v_j^{(m)} = 0 \quad (v_1^{(m)}, \dots, v_{n \cdot m}^{(m)}) \text{ l.u.} \Rightarrow \text{alle } \lambda_{m,j} = 0
 \end{aligned}$$

(3.23) Definition

Sei $A \in K^{n \times n}$, c EW von A

$a(c, A) :=$ Vielfachheit der Nullstellen c von χ_A heißt **algebraische Vielfachheit** von c .

$g(c, A) := \dim V(c, A) = \text{Def}(A - c \cdot E)$ heißt **geometrische Vielfachheit** von c .

$1 \leq a(c, A), g(c, A) \leq n$ (offensichtlich)

! Wichtiges Ergebnis dieses Kapitels!

(3.24) Folgerung

Sei $A \in K^{n \times n}$

a) $\sum_{c \text{ EW}} g(c, A) \leq n$

b) A diagonalisierbar $\Leftrightarrow \sum_{c \text{ EW}} g(c, A) = n$

c) χ_A zerfällt vollständig in paarweise verschiedene Linearfaktoren bzw. A hat n paarweise verschiedene EW
 $\Rightarrow A$ diagonalisierbar (**hinreichendes Kriterium für Diagonalisierbarkeit, aber nicht notwendig. Greift z.B. im Bsp. (3.1 d+e)**)

Beweis:

a) Seien c_1, \dots, c_m die verschiedenen EW von A .

Wähle in Satz (3.22) zu jedem EW c_i eine Basis $(v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)})$, also $n_i = g(c_i, A)$

Der Satz liefert ein l.u. Tupel der Länge $\sum_{i=1}^m n_i = \sum_{i=1}^m g(c_i, A)$ daher $\sum_{i=1}^m n_i = \sum_{i=1}^m g(c_i, A) \leq \dim K^n = n$

b) A diagonalisierbar \Leftrightarrow es gibt Basis aus EV \Leftrightarrow das Tupel aus a) hat die Länge n .
(3.20)

c) c_1, \dots, c_n paarweise verschiedene EW. $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \underbrace{g(c_i, A)}_{\geq} \stackrel{a), b)}{\Rightarrow} A$ diagonalisierbar.

(3.25) Beispiel

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}, K$ beliebig

$$\chi_A = (x-1)^2 \Rightarrow 1 \text{ einziger EW. } V(1, A) = \mathbb{L}_0(A-E)$$

$$A-E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rg}(A-E) = 1 \Rightarrow g(1, A) = 2-1 = 1$$

$$g(1, A) < 2 \stackrel{(3.24)b)}{\Rightarrow} A \text{ nicht diagonalisierbar.}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}, K$ beliebig.

$$\chi_A = (x-1) \cdot (x+1) \Rightarrow \text{EW } 1, -1$$

Wenn $1 \neq -1$ (z.B. $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$ mit $p \neq 2$) dann ist A nach Folgerung (3.24) diagonalisierbar.

$K = \mathbb{F}_2$: 1 ist **einziger** EW.

$$A - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Rg}(A-E) = 1 \Rightarrow g(1, A) = 2-1 = 1 < 2$$

$$\stackrel{(3.24b)}{\Rightarrow} A \text{ nicht diagonalisierbar (über } \mathbb{F}_2).$$

(3.26) Satz

Sei c EW von $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt $g(c, A) \leq a(c, A)$.

Beweis: Sei $g = g(c, A)$. Wähle eine Basis (v_1, \dots, v_g) von $V(c, A)$ und ergänze diese zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von K^n .

Dann hat $\varphi_A : x \mapsto A \cdot x$ bzgl. \mathcal{B} die Matrix die Form

$$M_{\varphi_A}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} c & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c & & * & \\ \hline & & & 0 & & B \end{array} \right)$$

Es folgt

$$\chi_A = \chi_{\varphi_A} = \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} x-c & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & x-c & & * & \\ \hline & & & 0 & & x \cdot E - B \end{array} \right)$$

$$\stackrel{\text{Kästchensatz}}{=} (x-c)^g \cdot \chi_B$$

Also ist c mindestens g -fache Nullstelle von χ_A , folglich $g \leq a(c, A)$. □

(3.27) Folgerung:

A diagonalisierbar $\Rightarrow \chi_A$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren. Haben also ein notwendiges Kriterium für Diagonalisierbarkeit.

Beweis: $A \in K^{n \times n}$ diagonalisierbar $\stackrel{(3.24b)}{\Leftrightarrow} \sum_{c \in \text{EW}} \underbrace{g(c, A)}_{\leq a(c, A)} = n$

$$\Rightarrow (\deg \chi_A) a \leq \sum_{c \in \text{EW}} a(c, A)$$

$\Rightarrow \chi_A$ zerfällt vollständig.

(3.28) Beispiel

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -2 & -2 & x+1 \end{vmatrix} = x^2 \cdot (x+1) - 2 - 2 \cdot x = x^3 + x^2 - 2 \cdot x - 2 = (x^2 - 2) \cdot (x+1)$$

Über \mathbb{Q} zerfällt $\chi_A(x)$ nicht vollständig in Linearfaktoren ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) $\Rightarrow A$ ist nicht diagonalisierbar über \mathbb{Q} .

Über \mathbb{R} zerfällt $\chi_A(x)$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren

$\Rightarrow A$ diagonalisierbar über \mathbb{R} .

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ nicht diagonalisierbar über \mathbb{R} , weil $\chi_A = x^2 + 1$ über \mathbb{R} nicht zerfällt. (vgl. Bsp. (3.18a))

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ nicht diagonalisierbar im $\mathbb{F}_2^{2 \times 2}$ (vgl. Bsp(3.25b)), obwohl das charakteristische Polynom $\chi_A = (x-1) \cdot (x+1)$ zerfällt. Folgerung (3.27) ist also nicht umkehrbar.

(3.29) Beispiel:

Anwendung: **Rekursive Folgen**

Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in K definiert durch Rekursionsgleichung

$$a_n := c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \dots + c_k \cdot a_{n-k}, \quad c_i \in K$$

und Anfangsgliedern a_0, \dots, a_{n-1}

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix} = C^{n-k+1} \cdot \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{n+k-1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = C^n \cdot \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Was ist C^n , n groß?

Idee: diagonalisiere $C : T^{-1} \cdot C \cdot T = D$ Diagonalmatrix.

$$\begin{aligned} \Rightarrow C^n &= c \cdot \dots \cdot c = T \cdot \underbrace{T^{-1} \cdot C \cdot T}_{\text{...}} \cdot \underbrace{T^{-1} \cdot C \cdot T}_{\text{...}} \cdot T^{-1} \cdot \dots \cdot T^{-1} \cdot C \cdot T^{-1} \cdot T \\ &= T \cdot (T^{-1} \cdot C \cdot T)^n \cdot T^{-1} \\ &= T \cdot D^n \cdot T^{-1} \text{ mit } D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_m \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} d_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & d_m^n \end{pmatrix} \text{ leicht!} \end{aligned}$$

(3.30) Beispiel

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (\text{Fibonacci})$$

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = C^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_C(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow \text{EW sind } c_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{p-q-Formel})$$

$$\text{EV sind } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D := T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \text{ mit } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \underbrace{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{v_1} & \underbrace{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{v_2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^n = T \cdot D^n \cdot T^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = C^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{erste Spalte von } C^n.$$

$$\Rightarrow a_n = \text{Eintrag von } C^n \text{ in Zeile 2 und Spalte 1.}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C^n &= \begin{pmatrix} * & * \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & * \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)}_{=a_n} & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wissen

$a(c, A)$ = algebraische Vielfachheit = Vielfachheit von c als Nullstelle von χ_A .

$\leq g(c, A)$ = geometrische Vielfachheit = $\dim V(c, A)$.

$$\Rightarrow (*) \quad \underset{\text{Anz. d. EW}}{r} \leq \sum_{c \text{ EW}} g(c, A) \leq \sum_{c \text{ EW}} a(c, A) \leq \underset{A \in K^{n \times n}}{n}$$

= bedeutet an der Stelle:

1. Es existieren n paarweise verschiedene EW. \Rightarrow
2. diagonalisierbar \Rightarrow
3. χ_A zerfällt vollständig in Linearfaktoren

klar aus (*): 1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3.

4. für jeden EW ist $a(c, A) = g(c, A)$

klar aus (*): 2. \Leftrightarrow 3. + 4.

Siehe auch "Charakterisierung von Diagonalisierbarkeit" auf den Folien der Vorlesung.

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\chi_A = \chi_B = (x-1)^2$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren, aber A nicht diagonalisierbar.

A ähnlich zu $B \not\Rightarrow \chi_A = \chi_B$
 $\not\Leftarrow_{A,B}$

(3.31) Definition + Bemerkung (Begleitmatrix)

Sei $f(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 \in K[x]$ normiert. Dann heißt

$$C(f) := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & & & -a_1 \\ 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

die **Begleitmatrix** von **f**.

Es gilt $\chi_{C(f)} = f$

„Jedes normierte Polynom ist charakteristisches Polynom einer geeigneten Matrix.“

z.B.

$$n = 1: C(x + a_0) = (-a_0).$$

$$n = 2: C(x^2 + a_1 \cdot x + a_0) = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Beweis: Induktion nach n .

$$n = 1: \chi_{C(x+a_0)} = \chi_{(-a_0)} = |x + a_0| = x + a_0. \quad \checkmark$$

$$n > 1: \chi_{C(f)} = \begin{vmatrix} x & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & & & \vdots & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} = |xE_n - C(f)|$$

LaPlace-Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\chi_{C(f)} = x \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & \ddots & & & \vdots & a_2 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}}_{\chi_{C(a_1 + a_2 \cdot x + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-2} + x^{n-1})}} + (-1)^{n-1} \cdot a_0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{vmatrix}}_{(-1)^{n-1}}$$

$$\stackrel{\text{Ind. Vorr.}}{=} x \cdot (a_1 + a_2 \cdot x + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-2} + x^{n-1}) + a_0 = f(x). \quad \square$$

Page Rank „Google-Algorithmus“

n Webseiten: S_1, \dots, S_n

S_j enthalte Links auf n_j verschiedene andere Seiten.

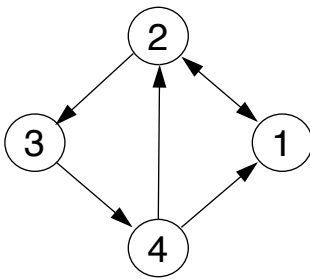
Definiere die „Link-Matrix“ $L = (l_{ij})$ durch

$$l_{ij} := \begin{cases} \frac{1}{n_j} & \text{falls } S_j \text{ verlinkt auf } S_i \\ 0 & \text{sonst (inkl. } i = j) \end{cases}$$

Die j -te Spalte enthält die Links von S_j .

Die i -te Zeile enthält die Links auf S_i .

Bsp.



$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Besonderheiten:

- L enthält viele Nullen, d.h. L ist dünn besetzt
- die Spaltensummen sind alle $= 1$:
 $\sum_{i=1}^n l_{ij} = 1 \quad \forall j.$

Das **Gewicht** (Wichtigkeit) von S_i ist $x_i := \sum_{j=1}^n l_{ij}$

Problem: „unwichtige“ Seiten, die sich gegenseitig verlinken, werden „wichtig“.

Lösung: Jede Seite hat nur so viele Stimmen wie ihrem Gewicht entspricht: $x_i = \sum_{j=1}^n l_{ij} x_j$

Gewichte sind Lösung von $x = L \cdot x$, d.h. x ist EV zum EW 1.

(3.32) Definition + Satz

Eine reelle Matrix mit Einträgen ≥ 0 und Spaltensummen $= 1$ heißt **Markov-Matrix** oder auch **Stochastische Matrix**.

Jede Markov-Matrix hat den EW 1 und es gibt einen EV zu 1 mit Einträgen ≥ 0 .

Beweis: Zeilensummen von $A^t = 1$, d.h. $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV von A^t zum EW 1.

$\Rightarrow 1$ ist EW von A . (A, A^t haben gleiche EW.)

Trick zur Berechnung eines EV zum EW 1: Bilde die Folge

$$x, L \cdot x, L^2 \cdot x, L^3 \cdot x, \dots \in \mathbb{R}^n$$

(das ist ein **Markov-Prozess**)

Konvergiert sie, dann ist der „Grenzwert“ ein EV zum EW 1.

Der Grenzwert ist leicht auszurechnen, weil L dünn besetzt ist.

$x \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Anfangswert.

im Beispiel:

$$L^i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ EV zum EW 1.

Markov-Prozess: hier „Zufallssurfer“

sinnvoller Anfangswert: $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

§11 Invariante Unterräume

(3.34) Definition

$U \leq V$ heißt φ -invariant, falls $\varphi(U) \subseteq U$.

In diesem Fall ist die Einschränkung $\varphi_U : U \rightarrow U, u \mapsto \varphi(u) \in \text{End}_K(U)$.

(3.35) Beispiele

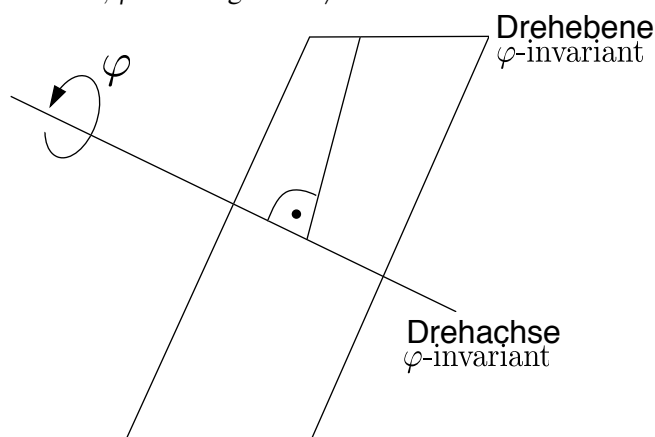
a) V und $\{0\}$ sind φ -invariant.

b) Alle Eigenräume von φ sind φ -invariant.

$$u \in V(c, \varphi) \Rightarrow \varphi(\varphi(u)) = \varphi(c \cdot u) = c \cdot \varphi(u) \Rightarrow \varphi(u) \in V(c, \varphi).$$

D.h. $V(c, \varphi)$ ist φ -invariant.

c) $V = \mathbb{R}^3$, φ Drehung um $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$



d) Für jedes $v \in V$ ist $U := \langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots, \varphi^n(v) \rangle$ ein φ -invarianter UR von V .

(3.36) Bemerkung

Sei $U \leq V, \varphi \in \text{End}_K(V)$.

Sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_d)$ Basis von $U, d = \dim U$.

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von $V, n = \dim V$.

Dann gilt

$$a) \ U \ \varphi\text{-invariant} \Leftrightarrow M_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{N}^{d \times d} & * \\ \hline \underbrace{0}_{(n-d) \times d} & * \end{array} \right)$$

In diesem Fall ist $N = M_{\varphi|_U}^{\mathcal{A}}$.

- b) U φ -invariant $\stackrel{\text{a) und Kästchensatz}}{\Rightarrow} \mathcal{X}_\varphi = \mathcal{X}_{\varphi|_U} \cdot f$ für ein $f \in K[x]$.
 d.h. $\mathcal{X}_{\varphi|_U}$ teilt \mathcal{X}_φ .

Beweis

- a) U φ -invariant $\Leftrightarrow \varphi(u) \in U \quad \forall u \in U$
 $\stackrel{\varphi \text{ linear u.}}{\Leftrightarrow} \varphi(v_i) \in U \quad \forall 1 \leq i \leq n$
 $\stackrel{\mathcal{A} \text{ Basis von } U}{\Leftrightarrow}$

$$\mathcal{X}_\mathcal{B} \varphi(v_i) = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = d \quad \forall 1 \leq i \leq d$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{X}_\mathcal{B} \varphi(v_i) = M_\varphi^\mathcal{B} \cdot \mathcal{X}_\mathcal{B}(v_i) = M_\varphi^\mathcal{B} \cdot e_i = i\text{-te Spalte von } M_\varphi^\mathcal{B}.$$

Für $1 \leq i \leq d$:

$$\mathcal{X}_\mathcal{B} \varphi(v_i) = \mathcal{X}_\mathcal{B}(\underbrace{\varphi|_U(v_i)}_{\in U}) = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_\mathcal{A} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \} d \quad \text{mit } \mathcal{X}_\mathcal{A}(\varphi|_U(v_i)).$$

(3.37) Satz

$A \in K^{n \times n}$.

A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix. $\Leftrightarrow \chi_A$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren.

Bemerkung: über \mathbb{C} ist das immer der Fall. (Fundamentalsatz)

Beweis: „ \Rightarrow “ ist klar.

„ \Leftarrow “ Induktion nach n . Sei $\chi_A = \prod_{i=1}^n (x - c_i)$.

Sei $v_1 \in K^n$ EW zu c_1 .

$\Rightarrow \langle v_1 \rangle$ φ -invariant. Ergänze v_1 zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V .

Sei $\varphi = \varphi_A$. Nach (3.36):

$$M_\varphi^\mathcal{B} = \left(\begin{array}{c|c} c_1 & * \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \in K^{n \times n}$$

$A = M_\varphi^\mathcal{C}$ ähnlich zu $M_\varphi^\mathcal{B}$.

$$\Rightarrow \chi_A = \chi_{M_\varphi^\mathcal{B}}$$

$$\Rightarrow \prod (x - c_i) = (x - c_1) \cdot \chi_D$$

$$\Rightarrow \chi_D = \prod_{i=2}^n (x - c_i)$$

$\stackrel{\text{Ind.vor.}}{\Rightarrow}$ ex. $S \in \text{GL}_n(K)$ mit $S^{-1} \cdot D \cdot S =$ obere Dreiecksmatrix.

Setze $T := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & S \end{array} \right) \in K^{n \times n}.$

Dann ist: $T \in \text{GL}_n(K), T^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & S^{-1} \end{array} \right),$

$$T^{-1} \cdot M_{\varphi}^{\mathcal{B}} \cdot T = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & S^{-1} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} c_1 & * \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & S \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} c_1 & * \\ \hline 0 & S^{-1} \cdot D \cdot S \end{array} \right).$$

obere Dreiecksmatrix.

Also ist A ähnlich zu oberer Dreiecksmatrix. □

(3.38) Beispiel

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}, f = x^2 - 5 \cdot x + 2 \in \mathbb{Q}[x].$
 $f(A) = A^2 - 5 \cdot A + 2 \cdot E$
 $= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$
 $\chi_A = f$

Zwischenspiel

$$f = x^2 - 5 \cdot x - 2$$

mathematischer Hintergrund beim „Einsetzen in Polynome“

$$f \in K[x].$$

$$a \in K, \tau_a : K[x] \rightarrow K, f \mapsto f(a)$$

Einsetzungshomomorphismus

(Ring- und VR-Homomorphismus)

$$\tau_a : 1 \mapsto 1$$

$$A \in K^{n \times n}, \tau_A : K[x] \rightarrow K^{n \times n}, f \mapsto f(A)$$

(auch Ring- und VR-Homomorphismus)

$$\tau_a : 1 \mapsto E$$

$$\text{z.B. } f(A) = A^2 - 5 \cdot A - 2 \cdot E.$$

$(\text{End}_K(V), +, \circ)$ ist Ring, der sogenannte Endomorphismenring. $\varphi \in \text{End}_K(V).$

$$\tau_{\varphi} : K[x] \rightarrow \text{End}_K(V), f \mapsto f(\varphi).$$

(auch Ring- und VR-Homomorphismus)

$$\begin{aligned}(f+g)(\varphi) &= f(\varphi) + g(\varphi) \\ (f \cdot g)(\varphi) &= f(\varphi) \circ g(\varphi) \\ 1(\varphi) &= \text{id} \\ (\lambda \cdot f)(\varphi) &= \lambda \cdot f(\varphi)\end{aligned}$$

b) $\varphi: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2, \begin{matrix} e_1 \mapsto e_1 + e_2 \\ e_2 \mapsto 2 \cdot e_1 + e_2 \end{matrix}$

$$f = x^2 - 2 \cdot x - 1 \in \mathbb{Q}[x].$$

$$f(\varphi) = \varphi^2 - 2 \cdot \varphi - \text{id} = \varphi \circ \varphi - 2 \cdot \varphi - \text{id} \in \text{End}_K(V)$$

$$\begin{aligned}f(\varphi)(e_1) &= (\varphi^2 - 2 \cdot \varphi - \text{id})(e_1) \\ &= \varphi(\varphi(e_1)) - 2 \cdot \varphi(e_1) - e_1 \\ &= \varphi(e_1 + e_2) - 2 \cdot (e_1 + e_2) - e_1 \\ &= \varphi(e_1) + \varphi(e_2) - 3 \cdot e_1 - 2 \cdot e_2 \\ &= e_1 + e_2 + 2 \cdot e_1 + e_2 - 3 \cdot e_1 - 2 \cdot e_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$f(\varphi)(e_2) = \dots = 0$$

D.h. $f(\varphi)$ ist die Nullabbildung.

$$f(\varphi) = 0 \text{ in } \text{End}_K(V).$$

c)

(3.39) Satz

Sei $\varphi \in \text{End}_K(V)$ fest.

Jedes $v \in V$ ist in einem φ -invarianten UR U_v mit:

$$1. \dim U_v = \min\{m \in \mathbb{N} \mid (v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots, \varphi^m(v)) \text{ l.a.}\}$$

$$2. \underbrace{\chi_{\varphi|_{U_v}}(\varphi)}_{\text{End}_K(V)}(v) = 0$$

Gilt $f(\varphi)(v) = 0$ mit $f \in K[x]$, so gilt $\dim U_v \leq \deg f$.

Beweis Sei $d := \min\{m \in \mathbb{N} \mid (v, \varphi(v), \dots, \varphi^m(v)) \text{ l.a.}\}$ und $U_v := \langle v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v) \rangle$.

Dann ist U_v φ -invariant, weil $(v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots, \varphi^m(v))$ l.a.

$\dim U_v = d$, $\mathcal{A} = (v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v))$ Basis von U_v . Sei

$$(*) \quad \varphi^d(v) = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i \cdot \varphi^i(v) \quad \lambda_i \in K$$

Dann

$$M_{\varphi|_{U_v}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & \lambda_0 \\ 1 & 0 & \dots & \vdots & \lambda_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & \lambda_{d-1} \end{pmatrix} \in K^{d \times d}, \text{ also gilt nach Beispiel (3.31):}$$

$$\chi_{\varphi|_U} = x^d - \lambda_{d-1} \cdot x^{d-1} - \dots - \lambda_0.$$

$$\text{Es folgt } \chi_{\varphi|_U}(\varphi) = \varphi^d - \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i \cdot \varphi^i, \quad \in \text{End}_K(V)$$

also

$$\chi_{\varphi|_U}(\varphi)(v) = \varphi^d(v) - \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i \cdot \varphi^i(v) = 0$$

$$f = a_m \cdot x^m + \dots + a_1 \cdot x + a_0 \in K[x].$$

$$0 = f(\varphi)(v) = a_m \cdot \varphi^m(v) + \dots + a_1 \cdot \varphi(v) + a_0 \cdot \underset{=v}{\text{id}(v)} \quad m+1 \text{ Vektoren}$$

$$\Rightarrow \deg f = \underset{\text{wegen d. Minimalität von d}}{m \geq d} = \dim U_v$$

□

(3.40) Bemerkung

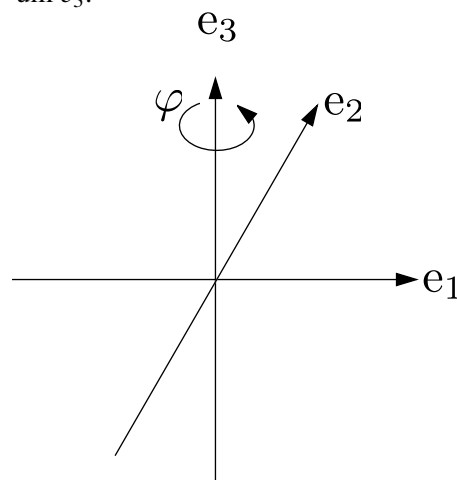
U_v aus (3.39) ist der kleinste φ -invariante UR U mit $v \in U$.

Nach (3.36b) ist $\chi_{\varphi|_U}$ Teiler von χ_φ . Man findet die kleinsten φ -invarianten UR also so:

1. Bestimme für jeden Teiler f von χ_φ ein $v \in V$ mit $\chi_f(\varphi)(v) = 0$, d.h. $v \in \text{Ker}(\chi_f(\varphi))$.
2. Bilde U_v für jedes solche v . ($\Rightarrow \dim_{U_v} \leq \deg f$).

(3.41) Beispiel

$V = K^3, \varphi$ Drehung um 90° um e_3 .



$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_\varphi = (x-1) \cdot (x^2+1).$$

Bestimme

$$1. \mathbb{L}_0(M_\varphi - E) = V(1, \varphi) = \dots = \left\langle \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle e_3 \rangle.$$

$$2. \mathbb{L}_0(M_\varphi^2 + E) = \mathbb{L}_0 \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{M_\varphi^2} + E \right) = \mathbb{L}_0 \left(\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle e_1, e_2 \rangle.$$

$$\chi_\varphi = (x-1) \cdot (x^2+1)$$

$$\chi_\varphi = (\varphi - \text{id}) \circ (\varphi^2 + \text{id}) \stackrel{\text{Cayley-Hamilton}}{=} 0.$$

Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

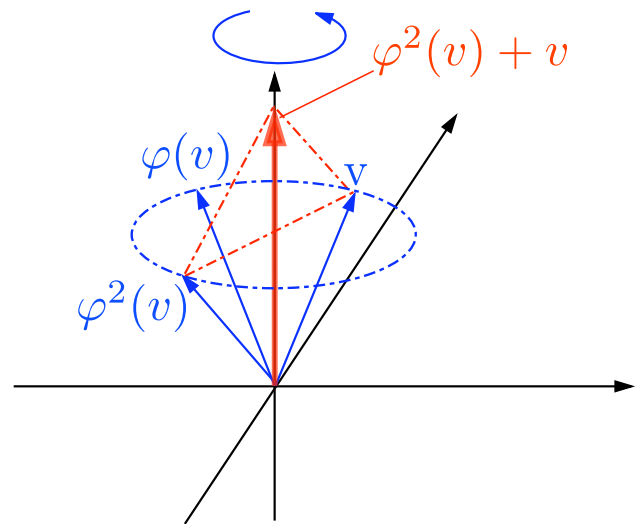
$$(\varphi^2 + \text{id})(v) = \varphi^2(v) + v \in \langle e_3 \rangle$$

Also:

$$\chi_\varphi(\varphi)(v) = (\varphi - \text{id})(\underbrace{\varphi^2(v) + v}_{=: w \in \langle e_3 \rangle})$$

$$= \varphi(w) - w$$

$$\stackrel{w \in \langle e_3 \rangle}{=} w - w = 0. \quad \checkmark$$



(3.42) Folgerung (Satz von Cayley-Hamilton)

Sei $\varphi \in \text{End}_K(V)$ fest bzw. $A \in K^{n \times n}$ fest.

$$a) \chi_\varphi(\varphi) = 0, \chi_A(A) = 0$$

(Satz von Cayley-Hamilton)

$$b) \text{ Sei } \chi_\varphi = f_1 \cdots f_r \text{ bzw. } \chi_A = f_1 \cdots f_r \text{ mit } f_i \in K[x], \deg f_i \geq 1.$$

$$\text{Sei } m := \max\{\deg f_i \mid 1 \leq i \leq r\}.$$

Dann gibt es einen φ -invarianten UR mit $1 \leq \dim U \leq m$.

Beweis

$$a) \text{ Sei } v \in V \text{ beliebig, } U_v \text{ aus (3.39).}$$

Nach (3.36b) ist $\chi_{\varphi|_{U_v}}$ Teiler von χ_φ , d.h. $\chi_{\varphi|_{U_v}} = g \cdot \chi_{\varphi|_{U_v}}$ für ein $g \in K[x]$.

$$\Rightarrow \chi_\varphi(\varphi) = g(\varphi) \circ \chi_{\varphi|_{U_v}}(\varphi)$$

$$\Rightarrow \chi_\varphi(\varphi)(v) = g(\varphi) \cdot \underbrace{(\chi_{\varphi|_{U_v}}(\varphi)(v))}_{=0 \text{ nach (3.39)}} = 0.$$

D.h. $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ (Nullabbildung)

b) $r = 1$ klar. Hier für $r = 2$ (sonst Induktion nach r).

Sei $\chi_\varphi = f \cdot g$. Nach a) ist $0 = \chi_\varphi(\varphi) = f(\varphi) \circ g(\varphi)$.

Sei $0 \neq v \in V$ beliebig.

$$\Rightarrow 0 = \chi_\varphi(\varphi)(v) = f(\varphi)(g(\varphi)(v)).$$

1. Fall: $g(\varphi)(v) = 0 \Rightarrow \dim U_v \leq \deg g \leq m$

2. Fall: $\underbrace{g(\varphi)(v)}_{=: v'} \neq 0$. $f(\varphi)(v') = 0$.

$$\Rightarrow \dim U_{v'} \leq \deg f \leq m.$$

□

(3.42.1) (3.46) Beispiel (Matrix-Inverses mit Cayley-Hamilton)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{vmatrix} = (x-1)(x-4) - 6 = x^2 - 5x - 2$$

nach Cayley-Hamilton (3.45): $\chi_A(A) = A^2 - 5A - 2E_2 = 0$

$$\Rightarrow A^2 - 5A = 2E_2$$

$$\Rightarrow A \cdot \frac{1}{2}(A - 5E_2) = E_2$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5E_2).$$

Warum diagonalisieren wir?

→ geometrische Anschauung (welches LGS steckt hinter Matrix)

→ Potenzieren von Matrizen (effektiver)

Anwendung: "Rekursive Folgen":

Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in K definiert durch lineare Rekursionsgleichung:

$$a_n := c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

und Anfangsgliedern a_0, \dots, a_{k-1} .

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_{n-k} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=: C \in K^{k \times k}} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix} \in K^{k \times k}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{n+k-1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} \quad \text{Was ist } C^n \text{ für große } n?$$

§11 Invariante Unterräume

Idee: Wenn C diagonalisierbar und diagonalisiert (Diagonalmatrix) für ein T: $D = T^{-1}CT$ Diagonalmatrix.

$\Rightarrow C^n = \underbrace{C \cdot \dots \cdot C}_{n\text{-mal}} = T \underbrace{(T^{-1}CT)}_D \underbrace{(T^{-1}C \cdot \dots \cdot CT)}_{D \dots D} T^{-1} \stackrel{\text{Assoziativität}}{=} TD^nT^{-1}$ leicht zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} d_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & d_k^n \end{pmatrix}$$

(3.42.2) (3.47) Beispiel (Fibonacci)

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad q_0 = 0, a_1 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_C(x) = x^2 - x - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{EW sind } c_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \text{EV sind } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Löse LGS zur Berechnung:

$$\Rightarrow T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow D := T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow C^n = TD^nT^{-1}$$

Wegen $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist a_n der Eintrag von C^n in Zeile 2 und Spalte 1 (also berechnen wir "nur" diese):

$$\begin{aligned} C^n = TD^nT^{-1} &= \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & * \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & * \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-\sqrt{5}}}_{(\det(T)=-\sqrt{5}) \text{ Adjunktenformel!}} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) & * \end{pmatrix} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) \end{aligned}$$

Teil IV

Euklidische Vektorräume

§11 Invariante Unterräume

Im gesamten Kapitel XI ist $K = \mathbb{R}$ und V ein \mathbb{R} -VR (aber nicht notwendigerweise endlichdimensional!).

Wissen

Fakt 1: Jedes $f \in \mathbb{R}[x]$ hat eine Zerlegung $f = f_1 \cdots f_r$ mit $\deg f_i \leq 2$ für alle i .

Fakt 2: Jedes $f \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg f$ ungerade hat eine Nullstelle.

Folge:

1. Jedes $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ hat einen φ -invarianten UR U mit $\dim U \leq 2$.
2. Ist $\dim_{\mathbb{R}} V$ ungerade, so hat jeder $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ einen EW.

§12 Euklidische VR

(4.1) Definition (Skalarprodukt)

Eine Abbildung $\langle \star, \star \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Skalarprodukt auf V**, wenn für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$ gelten:

- (S1) $\langle v, \lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 \rangle = \lambda_1 \cdot \langle v, w_1 \rangle + \lambda_2 \cdot \langle v, w_2 \rangle$ (Linearität)
- (S2) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (Symmetrie)
- (S3) $\langle v, v \rangle > 0$ für alle $v \neq 0$ (Positiv definiert)

Bemerkung:

- (S1) + (S2) $\Rightarrow \langle \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2, w \rangle = \lambda_1 \cdot \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \cdot \langle v_2, w \rangle$
- $\langle v, 0 \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$ (aus (S1), $\lambda = 0$)

Ein \mathbb{R} -VR mit Skalarprodukt heißt **V euklidischer Vektorraum**.

Für $v \in V$ heißt $\|v\| := \sqrt{\underbrace{\langle v, v \rangle}_{\text{immer positiv (S3)}}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die **Länge** oder **Norm** von v .

v heißt **normiert**, wenn $\|v\| = 1$.

Bemerkung: $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.

(4.2) Beispiel

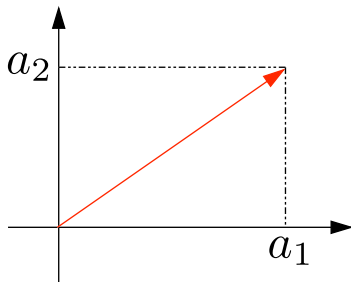
a) Standardskalarprodukt

$$V = \mathbb{R}^n : \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle := \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i b_i}_{\geq 0} \in \mathbb{R}$$

$$\left[\text{bzw.} := \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right], \text{ ist das Standardskalarprodukt}$$

damit heißt \mathbb{R}^n auch der **n-dimensionale euklidische Raum**.

$$\text{Es ist } \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

z.B. $n = 2$:

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = l = \text{Länge nach Pythagoras}$$

b) Stetige Funktionen

 $V = C^0([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ ist \mathbb{R} -VR

 $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt \in \mathbb{R}$ definiert ein Skalarprodukt auf V .

(Beachte: $\int_0^1 f(t)^2 dt \stackrel{(f \text{ stetig})}{>} 0$ für $f \neq 0$, also ist (S3) erfüllt)

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}$$

c) Symmetrische Matrizen

 $V = \mathbb{R}^n$, $A \in K^{n \times n}$ **symmetrisch**, also $A = A^t$.
Ist $\langle v, w \rangle := v^t \cdot A \cdot w \in \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt?

Es ist $\langle v, w \rangle = v^t \cdot A \cdot w = (w^t \cdot A^t \cdot v)^t \stackrel{(A \text{ symmetrisch})}{=} w^t \cdot A \cdot v = \langle w, v \rangle$.

Also ist (S2) erfüllt. Doch was ist mit (S3)?

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\langle v, v \rangle = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \dots = (2a - b)^2 + 2b^2 > 0 \text{ für } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > 0.$$

(S3) ist erfüllt, also definiert A ein Skalarprodukt.

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\langle v, v \rangle = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

(S3) ist nicht erfüllt, also definiert A kein Skalarprodukt.

Symmetrie ist also kein ausreichendes Kriterium.

(4.3) Eigenschaften des Skalarproduktes

Sei $\langle \star, \star \rangle$ ein Skalarprodukt auf V , dann gilt für alle $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$:a) Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ (und $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\|$ genau dann wenn v und w linear abhängig (parallel) sind).b) $\|v\| \geq 0$;

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

- c) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$, $\underbrace{\frac{v}{\|v\|}}_{=\frac{1}{\|v\|} \cdot v}$ ist normiert.
- d) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)
- e) aus d folgt: $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v-w\|$
- f) $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$ (Polarisationsformel)

Beweis:

- a) $w=0 \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0 = \|v\| \cdot \|w\|$, (v, w) l.a. \checkmark

Sei $w \neq 0$. Setze $\lambda := -\frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\leq \langle v + \lambda w, v + \lambda w \rangle \stackrel{(S1)}{=} \langle v, v \rangle + \lambda \langle v, w \rangle + \lambda \overbrace{\langle w, v \rangle}^{(S2)} + \lambda^2 \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - 2 \frac{\langle v, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle} + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle} = \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle} \\ &\Rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad \square. \end{aligned}$$

- d) $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle$
 $\stackrel{(S1)}{=} \langle v, v+w \rangle + \langle w, v+w \rangle$
 $\stackrel{(S1)}{=} \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle$
 $\stackrel{(S2)}{=} \langle v, v \rangle + 2 \cdot \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle$
 immer positiv $|\langle v, v \rangle + 2 \cdot \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle|$
 durch Quadrat $\leq \|v\|^2 + 2 \cdot \underbrace{|\langle v, w \rangle|}_{\substack{\leq \|v\| \cdot \|w\| \\ a)}} + \|w\|^2$
 bekannte Dreiecksungleichung in \mathbb{R}
 $\leq (\|v\| + \|w\|)^2 \quad \square$

(4.4) Definition (Winkel)

V euklidischer VR, $v, w \in V$.

Nach Cauchy-Schwarz'scher Ungleichung (Satz (4.3a)) ist:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|,$$

d.h. $0 \leq \frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$ (falls nicht $v = w = 0$).

$$\text{also: } -1 \leq \underbrace{\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}}_{\cos \alpha} \leq 1$$

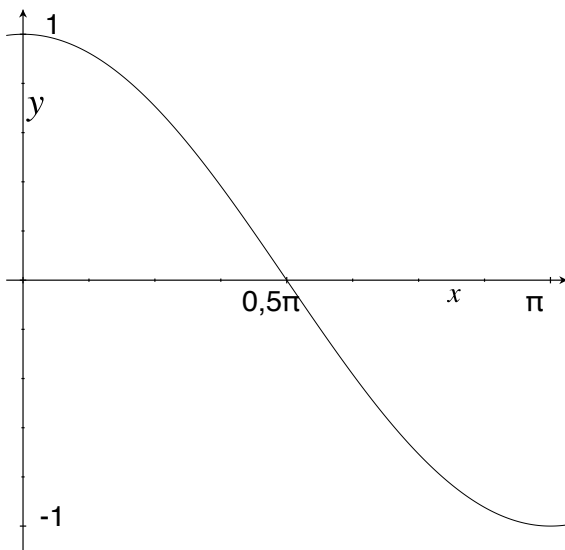
$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv:

Das eindeutige $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

v und w heißen **orthogonal**, geschrieben $v \perp w$, wenn $\langle v, w \rangle = 0$ (d.h. $\alpha = \frac{\pi}{2}$).

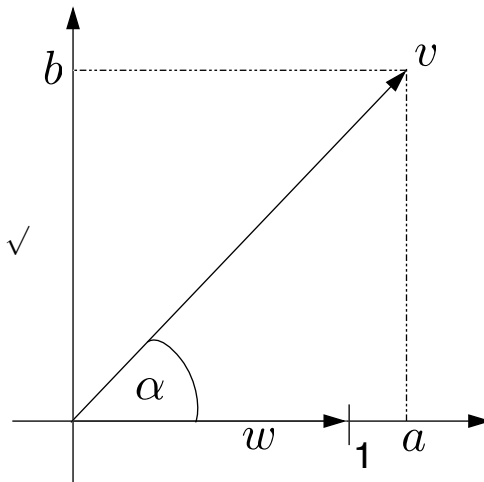
heißt **Winkel zwischen v und w**.

**(4.5) Beispiel**

a) $V = \mathbb{R}^2$ der euklidische Raum.
 ↑ heißt Standard-Skalarprodukt

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{a \cdot 1 + b \cdot 0}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{a}{\underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{\text{Länge von } v}} \quad \checkmark$$

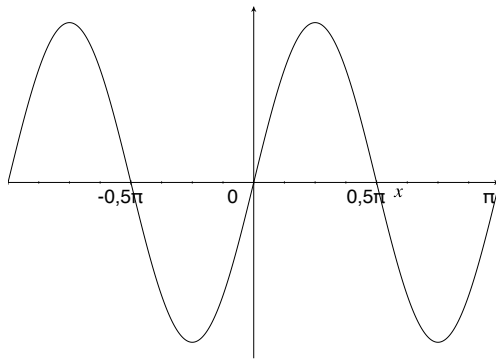


b) Sei $V = C^0([-\pi, \pi]) = \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ und

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

$$\langle \sin, \cos \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(x) \cdot \cos(x)}_{=\frac{1}{2} \sin(2x)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) dx \quad \text{d.h. sin und cos sind orthogonal.}$$

$$= 0.$$



c) \forall eukl. VR, $v, w \in V$.

$$v, w \text{ l.a.} \stackrel{\text{C.S.U.}}{\Leftrightarrow} |\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm 1 \Leftrightarrow \alpha \in \{0, \pi\} \Leftrightarrow v, w \text{ „parallel“}$$

Spezialfall $\|v\| = \|w\| = 1$.

Haben: $-1 \leq \langle v, w \rangle \leq 1$.

$$\underset{\substack{v \perp w \\ \text{(orthogonal)}}}{0} \leq \underset{\substack{v = -w \\ \text{(parallel)}}}{|\langle v, w \rangle|} \leq \underset{\substack{v = w \\ \text{(parallel)}}}{1}$$

$\langle v, w \rangle$ bzw. $|\langle v, w \rangle|$ ist ein Maß für die Gleichheit/Übereinstimmung zweier normierter Vektoren v, w .

(4.6) Anwendung (Vektorraum basierte Suche)

Beispiele:

a) Gegeben:

n Dokumente

m Terme

Definiere zu Dokument j den Vektor

$$d'_j = \begin{pmatrix} d'_{1,j} \\ \vdots \\ d'_{m,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

wobei $d'_{i,j}$ = Häufigkeit des Terms i in Dokument j und normiere:

$$d_j := \frac{d'_j}{\|d'_j\|}.$$

Die Matrix $D := (d_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt **Term-Dokumente-Matrix**.

D ist groß, aber dünn besetzt!

Aus einer Suchanfrage nach den Termen i_1, \dots, i_l wird der Suchvektor

$$q' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow i_1 \\ \\ \leftarrow i_2 \\ \\ \vdots \end{matrix} \quad \text{gebildet und normiert.}$$

$$q := \frac{q'}{\|q'\|}$$

Frage: Welches Dokument passt am besten zu q ?

Antwort: Dokument j , für das $\langle d_j, q \rangle$ maximal wird.

Berechne also alle $\langle d_j, q \rangle$, $j = 1, \dots, m$,

bzw. $q^t \cdot D = (\langle d_1, q \rangle, \langle d_2, q \rangle, \dots, \langle d_m, q \rangle)$

und finde den höchsten Eintrag.

b) Gegeben: n Audio-Dateien d_1, \dots, d_n .

$d_i \in V = C^0([0, 1])$.
Suchvektor: $q \in V$. $c \left. \vphantom{\begin{matrix} d_i \in V \\ \text{Suchvektor} \end{matrix}} \right\} \text{ z.B. Länge 1 s und normiert.}$

$$\text{Maximiere } \langle q, d_i \rangle = \int_0^1 q(x) \cdot d_i(x) dx.$$

(4.7) Definition (Gram-Matrix)

Sei V euklidischer Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$.

Dann heißt $G^{\mathcal{B}}(\langle, \rangle) := (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die **Gram-Matrix** von \langle, \rangle bezüglich \mathcal{B}

(4.8) Beispiel

a) $V = \mathbb{R}^n, \mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n), \langle, \rangle$ Standard-Skalarprodukt (SSP)

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow G^{\mathcal{E}}(\langle, \rangle) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E_n.$$

$$\text{b) } V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right); \langle, \rangle \text{ SSP.}$$

$$\Rightarrow G^{\mathcal{B}}(\langle, \rangle) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

(4.9) Bemerkung + Definition (Eigenschaften der Gram-Matrix)

V eukl. VR, \mathcal{B} Basis, $A = G^{\mathcal{B}}(\langle, \rangle) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

a) Für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle v, w \rangle = \mathcal{X}_{\mathcal{B}}(v)^t \cdot A \cdot \mathcal{X}_{\mathcal{B}}(w) \in \mathbb{R}$$

im Beispiel (4.8a): $\langle v, w \rangle = \mathcal{X}_{\mathcal{E}}(v)^t \cdot E_n \cdot \mathcal{X}_{\mathcal{E}}(w) = v^t \cdot w$.

b) A symmetrisch (d.h. $A = A^t$) und für all $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$x^t \cdot A \cdot x > 0.$$

Solche Matrizen heißen positiv definiert.

c) Umgekehrt definiert jede positiv definierte Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein Skalarprodukt:

$\langle \cdot, \cdot \rangle_A^{\mathcal{B}}$ auf V via

$$\langle v, w \rangle_A^{\mathcal{B}} := \mathcal{X}_{\mathcal{B}}(v)^t \cdot A \cdot \mathcal{X}_{\mathcal{B}}(w).$$

z.B. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \mathcal{E}$.

$$\langle v, w \rangle_A^{\mathcal{E}} = v^t \cdot A \cdot w.$$

d) Haben Bijektion (für festes \mathcal{B}):

$\{ \text{Skalarprodukt auf } V \} \longleftrightarrow \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A \text{ positiv definiert} \}.$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \mapsto G^{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_A^{\mathcal{B}} \leftarrow A$$

(4.10) Beispiel

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ symmetrisch? \checkmark

positiv definiert?

$$x^t \cdot A \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0?$$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot a - 2 \cdot b \\ -2 \cdot a + 3 \cdot b \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot a^2 - 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot b + 3 \cdot b^2$$

$$(2 \cdot a - b)^2 + 2 \cdot b^2 > 0 \quad (\text{außer } a = b = 0)$$

$\Rightarrow A$ positiv definiert.

$\Rightarrow \langle x, y \rangle := x^t \cdot A \cdot y$ definiert Skalarprodukt (SP).

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ symmetrisch

$$\text{z.B. } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$x^t \cdot A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \leq 0.$$

$\Rightarrow A$ nicht positiv definiert.

$\Rightarrow A$ definiert kein Skalarprodukt.

(4.11) Satz (Basiswechselsatz für Gram-Matrizen)

Sei V euklidischer Vektorraum mit Basen \mathcal{A}, \mathcal{B} .

Es gilt: $G^{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = T^t \cdot G^{\mathcal{A}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) \cdot T$

wobei $T = {}^{\mathcal{A}}T^{\mathcal{B}}$.

§13 Orthogonalität

Sei V eukl. VR.

(4.12) Definition

Sei $u, v \in V, M \subseteq V$.

$u \perp v: \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$.

$u \perp M: \Leftrightarrow u \perp v \quad \forall v \in M$

$M^\perp := \{u \in V \mid u \perp M\} \leq V$ **Orthogonalraum zu M .**

$0 \perp M$

$$\left. \begin{array}{l} u \perp M, v \perp M \\ u \perp M, \lambda \in K \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u + v \perp M \\ \lambda \cdot u \perp M \end{array} \right.$$

(4.13) Beispiel (Normalenform der Ebene)

$V = \mathbb{R}^3, 0 \neq v \in V, M = \{v\}$.

$M^\perp = \{u \in V \mid u \perp v\}$

ist die Ebene (durch 0), die senkrecht auf v steht.

Die Beschreibung einer Ebene als $E = \{v\}^\perp$ ist bekannt als **Normalenform** von E . (v ist der sog. Normalenvektor).

Parameterform $E = \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2$.

(4.14) Bemerkung + Beispiel

Für $M \subseteq V$ gilt: $M^\perp = \langle M \rangle^\perp$.

Beweis: „ \supseteq “ klar.

„ \subseteq “: $u \perp M \Leftrightarrow u \perp v \quad \forall v \in M$

$$\Rightarrow u \perp \sum_{i=1}^l \lambda_i \cdot v_i \quad \forall v_i \in M, \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow u \perp \langle M \rangle.$$

Beispiel $V = \mathbb{R}^n$ der eukl. Raum (d.h. \langle, \rangle SSP).

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times \dots}, B \in K^{\dots \times n}$

$\mathbb{L}_0(B), \text{SR}(A) \leq \mathbb{R}^n$

Dann gilt:

a) $\text{SR}(A)^\perp = \mathbb{L}_0(A^t)$

b) $\mathbb{L}_0(B)^\perp = \text{SR}(B^t).$

Beweis

a) Sei $A = (s_1, \dots, s_r)$, $s_i \in \mathbb{R}$.

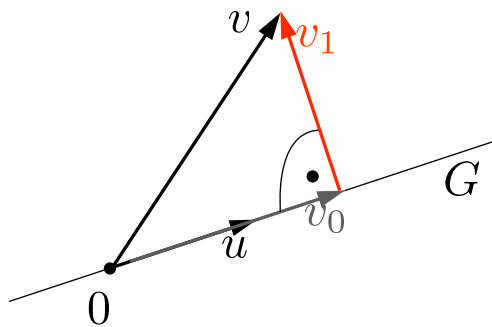
$$\begin{aligned} \text{SR}(A)^\perp &\stackrel{\text{Bem.}}{=} \{s_1, \dots, s_r\}^\perp \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle s_i, x \rangle = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid s_i' \cdot x = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq r\} \\ &= \mathbb{L}_0(A^t). \end{aligned}$$

b) Sei $\mathbb{L}_0(B) = \text{SR}(H)$, $H \in \mathbb{R}^{1 \times \dots}$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \text{ a) } \text{SR}(H)^\perp = \mathbb{L}_0(H^t) \\ 2. \text{ wissen: } \mathbb{L}_0(H^t) = \text{SR}(B^t) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{L}_0(B)^\perp = \text{SR}(H)^\perp = \mathbb{L}_0(H^t) = \text{SR}(B^t).$$

(4.15) Bemerkung (Projektion)

V eukl. VR. $0 \neq u, v \in V$.



Es gibt eine Zerlegung $v = v_0 + v_1$ mit $v_0 \in \langle u \rangle$ und $v_1 \perp u$.

Beweis Setze

$$v_0 := \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \cdot u \in \langle u \rangle.$$

Projektionsformel

$$v_1 := v - v_0.$$

$$\Rightarrow \langle v_0, u \rangle = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \cdot \langle u, u \rangle = \langle v, u \rangle$$

$$\Rightarrow \langle v_1, u \rangle = \langle v - v_0, u \rangle = \langle v, u \rangle - \langle v_0, u \rangle = 0, \text{ also } v_1 \perp u.$$

Falls u normiert: $v_0 := \langle v, u \rangle \cdot u$.

Frage: Projektion auf Ebene/beliebige UR?

(4.16) Definition

V eukl. VR, $v_1, \dots, v_r \in V$, $\dim V = n$.

(v_1, \dots, v_r) heißt

a) **Orthogonalsystem** oder **orthogonales Tupel**, wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$.

b) **Orthonormalsystem** oder **orthonormales Tupel**, wenn $\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$

Wenn (v_1, \dots, v_n) Basis von V , dann sprechen wir von **Orthogonalbasen** bzw. **Orthonormalbasen**.

(4.17) Bemerkung (zu Orthogonal(/-normal)Basen)

Für $v_1, \dots, v_n \in V, n = \dim V, \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ sind äquivalent:

1. \mathcal{B} ONB
2. $G^{\mathcal{B}}(\langle, \rangle) = E_n$
3. $\langle v, w \rangle = \mathcal{X}_{\mathcal{B}}(v)^t \cdot \mathcal{X}_{\mathcal{B}}(w) \quad \forall v, w \in V$
4. $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}(V) = \begin{pmatrix} \langle v, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_n \rangle \end{pmatrix}$ bzw. $v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle \cdot v_i$
Orthogonalentwicklung

Beweis

1. $G^{\mathcal{B}}(\langle, \rangle) = (\langle v_i, v_j \rangle)$
 1. \Rightarrow 2. klar aus Def.
2. \Rightarrow 3. $\langle v, w \rangle = \mathcal{X}_{\mathcal{B}}(v)^t \cdot G^{\mathcal{B}}(\langle, \rangle) \cdot \mathcal{X}_{\mathcal{B}}(w)$.
3. \Rightarrow 4. $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
 Dann $\langle v, v_i \rangle = (x_1 \ \dots \ x_n) \cdot e_i = x_i$. \checkmark
4. \Rightarrow 1. klar. $\langle v_i, v_j \rangle = \underbrace{\mathcal{X}_{\mathcal{B}}(v_i)}_{e_i}_j = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$

(4.18) Beispiel

$V = \mathbb{R}^3; \langle, \rangle$ Standard-Skalarprodukt

$$\mathcal{B} = \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_2}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w_3} \right) \text{ ist ONB von } \mathbb{R}^3$$

Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}(v) = ?$

(4.17): $v = \lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 + \lambda_3 \cdot w_3$.

$$\lambda_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1 + (-1) + 2) = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\lambda_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 + 1 + 0) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1 - 1 - 1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(4.19) Bemerkung

Jeder orthogonale Tupel ist l.u.

Beweis Sei (v_1, \dots, v_r) orthogonal und $\sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot v_i = 0$.

zu zeigen: alle $\lambda_i = 0$.

Für jedes $1 \leq j \leq r$ gilt:

$$0 = \langle v_j, 0 \rangle = \langle v_j, \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot v_i \rangle = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{=0 \text{ für } i \neq j} = \lambda_j \cdot \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow \lambda_j = 0.$$

(4.20) Satz + Definition (allgemeine Orthogonalprojektion)

Sei $U \leq V$ und U habe die OGB (u_1, \dots, u_r) . **$\dim U = r$**

Für jedes $v \in V$ gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$v = v_0 + v_{\perp}$$

mit $v_0 \in U, v_{\perp} \in U^{\perp}$.

$$\text{Dabei gilt } v_0 = \sum_{i=1}^r \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \cdot u_i. \quad \text{Projektionsformel (braucht OGB!)}$$

Die lineare Abbildung

$$\pi_U : V \rightarrow V, v \mapsto v_0.$$

heißt **orthogonale Projektion** auf U .

Beweis Eindeutigkeit:

Sei $v = v_0 + v_{\perp} = v'_0 + v'_{\perp}$ mit $v_0, v'_0 \in U$ und $v_{\perp}, v'_{\perp} \in U^{\perp}$

$$\Rightarrow \underbrace{v_0 - v'_0}_{\in U} = \underbrace{v'_{\perp} - v_{\perp}}_{\in U^{\perp}}$$

aber: stets $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ **Übung**

$$\Rightarrow v_0 - v'_0 = v'_{\perp} - v_{\perp} = 0$$

$$\Rightarrow v_0 = v'_0 \text{ und } v_{\perp} = v'_{\perp}.$$

§13 Orthogonalität

Existenz & Formel: Setze $v_0 = \sum_{i=1}^r \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \cdot u_i$.

$v_0 \in U$ klar. zu zeigen: $v_\perp = v - v_0 \in U^\perp = \{u_1, \dots, u_r\}^\perp$

$$(U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle \Rightarrow U^\perp = \{u_1, \dots, u_r\}^\perp)$$

zu zeigen: $\forall 1 \leq j \leq r : 0 = \langle v_\perp, u_j \rangle = \langle v - v_0, u_j \rangle = \langle v, u_j \rangle - \langle v_0, u_j \rangle$.

Sei $1 \leq j \leq r$:

$$\langle v_0, u_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^r \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \cdot u_i, u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^r \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \cdot \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{0 \text{ für } i \neq j} = \frac{\langle v, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} \cdot \langle u_j, u_j \rangle = \langle v, u_j \rangle.$$

$$\Rightarrow \langle v_\perp, u_j \rangle = 0. \quad \checkmark$$

□

(4.21) Beispiel

$V = \mathbb{R}^3; \langle, \rangle$; Standardskalarprodukt

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, U_1 = \langle v_1 \rangle, U_2 = \langle v_1, v_2 \rangle, U_3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = V$$

Berechne die Projektionen $\pi_{U_1}(v_2)$ und $\pi_{U_2}(v_3)$!

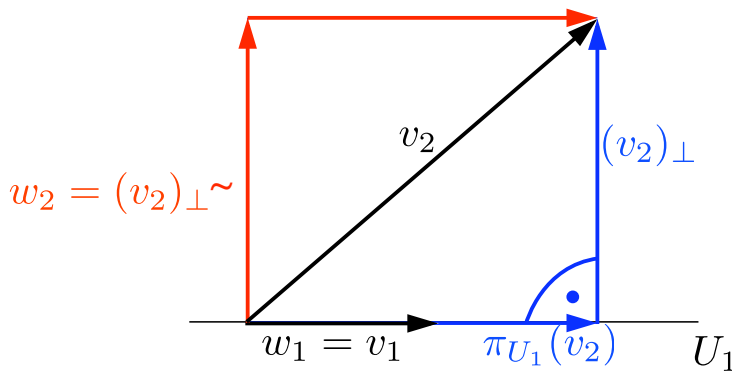
1. $\pi_{U_1}(v_2)$

Wähle OGB von U_1 : (w_1) mit $w_1 := v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Formel: } \pi_{U_1}(v_2) = \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 = \frac{1+0+2}{1+4+4} \cdot w_1 = \frac{1}{3} \cdot w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

2. $\pi_{U_2}(v_3)$

Wähle OGB von U_2 : (w_1, w_2) mit $w_1 := v_1, w_2 := v_2 - \pi_{U_1}(v_2)$.



$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\pi_{U_2}(v_3) = \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 + \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \cdot w_2 = \frac{0-2+2}{9} \cdot w_1 + \frac{0+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}{1} \cdot w_2 = w_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3. Zusatz:

Haben OGB von $V(w_1, w_2, w_3)$ mit w_1, w_2 wie oben und $w_3 = v_3 - \pi_{U_2}(v_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Also OGB: $\underbrace{\left(\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, 1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, 1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right)}_{\text{ONB}}.$

(4.22) Algorithmus (Gram-Schmidt)

Sei $U \leq V$ mit $\dim U = r$.

Input: (v_1, \dots, v_r) Basis von U .

Output: (w_1, \dots, w_r) OGB von U .

Folge: Jeder UR von V (inkl. V selbst) besitzt eine OGB!

1. Wenn $r = 1$, dann $w_1 := v_1$. Ende.
2. ($r \geq 2$): Setze $U' = \langle v_1, \dots, v_{r-1} \rangle$ und bestimme rekursiv eine OGB (w_1, \dots, w_{r-1}) von U' !
3. Setze $w_r := v_r - \pi_{U'}(v_r)$. Ende.

Beweis Zu zeigen ist für w_r aus 3.:

$w_r \notin U', w_r \in (U')^\perp$.

Haben: $v_r = \underbrace{\pi_{U'}(v_r)}_{v_0} + \underbrace{w_r}_{v_\perp}$

Nach (4.20) ist dies die eindeutige Zerlegung mit $\pi_{U'}(v_r) \in U'$ und $w_r \in (U')^\perp$.

Also: $w_r \in (U')^\perp$.

$w_r \in U' \Rightarrow v_r \in U' \Rightarrow (v_1, \dots, v_{r-1}, v_r)$ l.a. $\nmid (v_1, \dots, v_r)$ Basis von U .

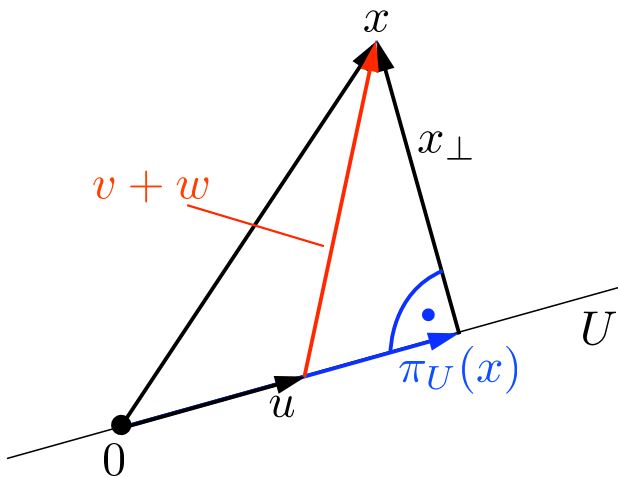
Also: $w_r \notin U'$. □

(4.23) Anwendung (der Projektion)

Für $U \leq V$ und $x \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} \min\{\|x - u\| \mid u \in U\} &= \|x - \pi_U(x)\| \\ &= \underbrace{(x, U)}_{\text{„Abstand zu } U\text{“}} = \|x_\perp\| \end{aligned}$$

Beweis:



$$x = x_0 + x_\perp = \pi_U(x) + x_\perp$$

Pythagoras (Übung): $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ falls $v \perp w$.

hier: $v = x_\perp$ und $w = \pi_U(x) - u$, also $v+w = \pi_U(x) - u + x_\perp = x - u$.

$$\Rightarrow \|x-u\|^2 = \|x_\perp\|^2 + \|\pi_U(x) - u\|^2.$$

$$\|x-u\| \text{ minimal} \Leftrightarrow \|\pi_U(x) - u\| \text{ minimal} \Leftrightarrow u = \pi_U(x).$$

Anwendung: Datenkompression.

$$\dim U < \dim V$$

$$\pi_U(x) \in U \quad x \in V$$

(4.24) Beispiel + Satz

Sei $V = \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definiert.

Setze $\langle, \rangle := \langle, \rangle_A^{\mathcal{E}}$, also $\langle x, y \rangle = x^t \cdot A \cdot y$.

Wie lautet eine ONB von V bzgl. \langle, \rangle ?

Idee: Da \langle, \rangle explizit durch A definiert ist, müsste auch eine ONB bzgl. \langle, \rangle aus A ableitbar sein.

Basiswechselsatz: Für jede Basis \mathcal{A} von V und $S := \mathcal{A} T^{\mathcal{E}}$ gilt:

$$(*) \underbrace{G^{\mathcal{E}}(\langle, \rangle_A^{\mathcal{E}})}_A = S^t \cdot G^{\mathcal{A}}(\langle, \rangle) \cdot S$$

\mathcal{A} ONB bzgl. \langle, \rangle

$$\stackrel{(4.17)}{\Leftrightarrow} G^{\mathcal{A}}(\langle, \rangle_A) = E$$

$$\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} A = S^t \cdot S.$$

Folglich gilt:

$$1. A \text{ positiv definiert} \Rightarrow A = S^t \cdot S \text{ für ein } S \in GL_n(\mathbb{R}).$$

$$2. A = S^t \cdot S, S \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{die Basis } \mathcal{A} \text{ von } V \text{ mit } \mathcal{A} T^{\mathcal{E}} = S \text{ ist ONB von } \langle, \rangle_A.$$

(Antwort auf Frage)

(4.25) Folgerung

Sei $U \leq V$.

- a) $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$
- b) $(U^\perp)^\perp = U$
- c) $U^\perp \leq V$ (... ist Untervektorraum)
- d) $U \cap U^\perp = \{0\}$
- e) $U \cup U^\perp = V$

Beweis

- a) Sei (v_1, \dots, v_m) Basis von U , (w_1, \dots, w_l) Basis zu U^\perp .
 $\Rightarrow (v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_l)$ Basis von V .
 Nach (4.20): Jedes $v \in V$ hat eindeutige Schreibweise:
 $v = v_0 + v_\perp, \quad v_0 \in U, v_\perp \in U^\perp$.
 \Rightarrow Jedes $v \in V$ hat **eindeutige** Schreibweise

$$v = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i + \sum_{j=1}^l \mu_j \cdot w_j.$$

b)

(4.25.1) (4.15) Folgerung

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann:

A positiv definiert (=1. symmetrisch; 2. $x^T A x \gg 0 \forall x \neq 0$)

\Leftrightarrow es gibt ein $S \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $A = S^T S$.

Beweis: „ \Rightarrow “ A pos. def. $\Rightarrow \langle v, w \rangle := v^T A w$ ist Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n mit $G^E(\langle, \rangle) = A$. (Bsp. 4.7b).

Sei B ONB bzgl. \langle, \rangle_A . (Satz 4.14c)

Dann ist $G^B(\langle, \rangle_A) = E_n$. (Def 4.10). (Satz 4.8): $A = G^B(\langle, \rangle_A) = S^T \overbrace{G^B(\langle, \rangle_A)} = E_n S$ mit $S = {}^B T^E \in GL_n(\mathbb{R})$
 Also $A = S^T S$.

„ \Leftarrow “ Sei $A = S^T S, S \in GL_n(\mathbb{R})$.

- $A^T = (S^T S)^T = S^T (S^T)^T = S^T S = A$ (Symmetrie)
- $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, V^T A V = (V^T S^T)(S V) = (S V)^T (S V) = \langle s_v, s_v \rangle \geq 0$

(4.25.2) (4.16) Definition + Bemerkung

V eukl. VR, $U \subset V, \dim V = n < \infty$

$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \forall u \in U\} = \{v \in V \mid u \perp v \forall u \in U\}$ heißt **Orthogonalraum von U**.

- $U^\perp \leq V$ (... ist Untervektorraum)
- $U \cap U^\perp = \{0\}$
- $U + U^\perp = V$
- $\dim U^\perp = n - \dim U$
- $(U^\perp)^\perp = U$

§13 Orthogonalität

Beweis von c)

Sei (v_1, \dots, v_m) ONB von U . Ergänze Sie zu einer ONB (v_1, \dots, v_n) von V . Es folgt, dass $v_{m+1}, \dots, v_n \in U^\perp$, denn $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \ \forall i \leq m, j \geq m+1$.

Also $v_1, \dots, v_n \in U \cup U^\perp \subseteq U + U^\perp$.

$\Rightarrow V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq U + U^\perp \leq V$

$\Rightarrow U + U^\perp = V$.

(4.25.3) (4.17) Beispiel

$V = \mathbb{R}^d$ eukl. Raum. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times d}, B \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $SR(A)^\perp = \mathbb{L}_0(A^T)$

$\mathbb{L}_0(B)^\perp = SR(B^T)$

Beweis: Seien s_1, \dots, s_d die Spalten von A . $x \in SR(A)^\perp$

$$\Leftrightarrow \langle n, x \rangle = 0 \ \forall n \in SR(A)$$

$$\Leftrightarrow \langle n, x \rangle = 0 \ \forall u = s_1, \dots, s_d$$

$$[\langle s_i, x \rangle = s_i^T x]$$

$$\Leftrightarrow s_i^T x = 0 \ \forall i = 1, \dots, d$$

$$\Leftrightarrow A^T x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{L}_0(A^T).$$

§14 Orthogonale Endomorphismen

V euklid. VR, $\dim_{\mathbb{R}} V = n < \infty$

(4.0.4) (4.18) Definition + Beispiel

$p \in \text{End}_K(V), A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) ϕ heißt orthogonal, wenn

$$\langle \phi(v), \phi(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V.$$

b) A heißt orthogonal, wenn $A^t A = E_n$

z.B.:

- $\text{id}_V : v \mapsto v$
- $-\text{id}_V : v \mapsto -v, -w \mapsto (-1)^2 \langle v, w \rangle = \langle v, w \rangle$
- $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, e_1 \mapsto e_2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t A = A^2 = E_2$$

Bemerkung:

ϕ orthogonal \Rightarrow

- $\|\phi(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in V$ („ ϕ erhält Länge“).
- $\alpha(\phi(v), \phi(w)) = \alpha(v, w) \quad \forall v, w \in V$ („Winkelerhaltend“)
- nur ± 1 können EW von ϕ sein.

$$\phi(v) = c \cdot v \Rightarrow \|\phi(v)\| = \|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\| \xrightarrow{v \neq 0} |c| = 1$$

(4.0.5) (4.19) Bemerkung

a) A orthogonal $\Rightarrow A$ invertierbar und $\det A = \pm 1$

b) Sei $\phi \in \text{End}_K(V), B$ ONB von V .

ϕ orthogonal $\Leftrightarrow M_{\phi}^B$ orthogonal $\xRightarrow{a)} \phi$ bijektiv und $\det \phi = \pm 1$

Beweis

a) $A^{-1} = A^t$

$$A^t \cdot A = E_n \Rightarrow 1 = \det(E_n) = \det(A^t) \cdot \det(A) = \det(A)^2 \Rightarrow \det(A) = \pm 1.$$

§14 Orthogonale Endomorphismen

b) Sei $A = M_\phi^B B$ ONB $= G^B(<, >) = E_n$, also $\forall v, w \in V$:

- $\langle v, w \rangle = X_B(v)^t \cdot X_B(w)$
- $\langle \phi(v), \phi(w) \rangle = X_B(\phi(v))^t \cdot X_B(\phi(w)) = (M_\phi^B X_B(v))^t \cdot (M_\phi^B X_B(w))$
 $(AX_B(v))^t \cdot (AX_B(w)) = X_B(v)^t A^t A X_B(w)$

$$\langle v, w \rangle = \langle \phi(v), \phi(w) \rangle \Leftrightarrow e_i^t A^t A e_j = (i, j) - \text{Eintrag von } A^t A$$

$$e_i^t e_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\rightarrow A^t A = E_n$$

D.h. ϕ orthogonal $\Leftrightarrow A$ orthogonal.

Erinnerung: (2.6.7): Isomorphismus von $V \leftrightarrow$ Basiswechsel von V .

hier (eukl. VR):

orthog. Homomorphismus von $V \leftrightarrow$ Wechsel zwischen ONB von V .

ϕ orthog. Isom. $\Rightarrow (B \text{ ONB von } V \Rightarrow \phi(B) \text{ ONB von } V)$

(4.0.6) (4.20) Satz

B ONB von V , $\phi \in \text{End}_K(V)$ bijektiv (d.h. Homomorphismus).

B' Basis von V .

a) B' ONB von $V \Leftrightarrow {}^B T^{B'}$ orthogonal.

b) $\phi(B)$ ONB von $V \Leftrightarrow \phi$ orthogonal.

Beweis

a) $G^{B'}(<, >) = T^t G^B(<, >) T$ mit $T = {}^B T^{B'}$

Also B' ONB $\Leftrightarrow G^{B'}(<, >) = E_n$

$$\Leftrightarrow T^t T = E_n$$

$$\Leftrightarrow T \text{ orthogonal}$$

b) folgt aus a).

(4.0.7) (4.20) Definition + Bemerkung

$O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^t A = E_n \subset GL - N(\mathbb{R})\}$

heißt orthogonale Gruppe.

Bem.: $O(n)$ ist Gruppe bzgl. Matrix-Mult.

$$\left. \begin{array}{l} \text{z.B. } A, B \in O(n) \Rightarrow A \cdot B \in O(n) \\ A^{-1} \in O(n) \\ E_n \in O(n) \end{array} \right\} \text{Übung}$$

(4.0.8) (4.21) Beispiel

n=2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

$$A \in O(n) \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1. \quad a^2 + c^2 = 1 \\ 2. \quad b^2 + d^2 = 1 \\ 3. \quad ab + cd = 0 \end{array}$$

$$1. \Leftrightarrow a = \cos \alpha, c = \sin \alpha \text{ für ein } \alpha \in [0, 2\pi)$$

$$2. \Leftrightarrow b = \sin \beta, d = \cos \beta \text{ für ein } \beta \in [0, 2\pi)$$

$$3. \stackrel{1.+2.}{\Leftrightarrow} \underbrace{\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta}_{=\sin(\alpha+\beta) \text{ Add.theorem}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = k \cdot \pi \text{ f. e. } k \in \mathbb{Z}.$$

Setze $\beta = k \cdot \pi - \alpha$ ein in 1.+2. :

$$d = \cos(k \cdot \pi - \alpha), b = \sin(k \cdot \pi - \alpha).$$

1. Fall: k gerade:

$$\Rightarrow d = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$b = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\text{Also: } A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\det A = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\chi_A(x) = x^2 - 2\cos \alpha x + 1$$

nicht diag.bar weil keine EW außer bei $\alpha \in \{0, \pi\}$.

2. Fall: k ungerade

$$\Rightarrow d = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$b = \sin(\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin \alpha$$

$$\text{Also } A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\det A = -1$$

$$\chi_A(x) = (x-1)(x+1)$$

Spiegelachse = V(1, A)

$$\text{immer diag.bar, ähnlich zu } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

—

$$A^t A = E_n$$

$$\Rightarrow \underbrace{\det(A^t)}_{\det(A)} \cdot \det(A) = \underbrace{\det(E_n)}_{=1}$$

$$\Rightarrow \det A = \pm 1$$

(4.0.9) (4.22) Bemerkung + Definition

$A \in O(n)$ heißt $\begin{cases} \text{eigentlich orthogonal oder Drehung} \\ \text{uneigentlich orthogonal (im } \mathbb{R}^2 \text{ Spiegelung)} \end{cases}$ wenn $\begin{cases} \det A = 1 \\ \det A = -1 \end{cases}$

$$AO(n) := \{A \in O(n) | \det A = 1\}$$

heißt spezielle orthogonale Gruppe.

Bem.: $SO(n) \leq O(n) \leq GL_n(\mathbb{R})$ sind Gruppen

die Spiegelungen bilden keine Gruppe!

$$\begin{array}{ccccc} \text{Drehung} & \circ & \text{Drehung} & = & \text{Drehung} \\ \det 1 & & \det 1 & & \det 1 \end{array}$$

$$\text{im } \mathbb{R}^2: \begin{array}{ccccc} \text{Drehung} & \circ & \text{Spiegelung} & = & \text{Spiegelung} \\ \det 1 & & \det -1 & & \det -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spiegelung} & \circ & \text{Spiegelung} & = & \text{Drehung} \\ \det -1 & & \det -1 & & \det 1 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{\text{Drehung}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 1 & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Spiegelungen}}$$

Jede Drehung ist Produkt zweier Spiegelungen (im \mathbb{R}^2).

Wir verallgemeinern jetzt den Fall

$$\begin{array}{c} n=2: \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & \\ & 1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cc} -1 & \\ & -1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cc} 1 & \\ & -1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cc} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right) \\ x \qquad \qquad \qquad x \qquad \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \qquad \text{mit } \alpha \neq 0, \pi \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x \end{array}$$

(4.0.10) (4.23) Satz

Sei $\varphi \in \text{End}_K(V)$ orthogonal. Dann gibt es eine ONB \mathcal{B} von V , so dass

$$M_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & A_1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

$$\text{wobei } A_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix} \in SO(2)$$

mit $\alpha_i \in (0, 2\pi), \alpha \neq \pi$.

$$\text{oder: } M_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & A_1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_i \in (0, 2\pi)$
 ($\alpha_i = \pi$ erlaubt)
 hier ist $\det \alpha = \pm 1$.

Beweis:

1. Einnerungen

U φ -invariante UR v. V ,

$$\mathcal{B} = (\underbrace{v_1, \dots, v_m}_{=\mathcal{B}' \text{ Basis von } U}, \underbrace{v_{m+1}, \dots, v_n}_{\mathcal{B}''}) \text{ Basis von } V$$

$$\Rightarrow M_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} M_{\varphi|U}^{\mathcal{B}} & 0 \\ \hline 0 & * \end{array} \right)$$

Jetzt: V eukl. VR und (v_1, \dots, v_n) ONB von V !

a) $\mathcal{B}'' = (v_{m+1}, \dots, v_n)$ Basis von U^{\perp} .

zu zeigen: $U^{\perp} = \langle v_{m+1}, \dots, v_n \rangle$

„ \supseteq “ klar, weil (v_1, \dots, v_n) ONB

„ \subset “: Sei $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in U^{\perp}$

$$\Rightarrow 0 \underbrace{= \langle v, v_j \rangle}_{f.a. j \leq m} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{= \lambda_j} = \lambda_j$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow v \in \langle v_{m+1}, \dots, v_n \rangle$$

b) U φ -invariant $\Rightarrow U^{\perp}$ φ -invariant

$$\varphi(U^{\perp}) = \{ \varphi(v) \mid \underbrace{\langle u, v \rangle}_{\varphi \text{ orthog.}} = 0 \text{ f.a. } u \in U \}$$

$$= \{ \varphi(v) \mid \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = 0 \text{ f.a. } u \in U \}$$

$$= \{ v' \mid \langle u', v' \rangle = 0 \text{ f.a. } u' \in \varphi(U) \}$$

$$= \varphi(U)^{\perp} \stackrel{U \varphi \text{-invariant, d.h. } \varphi(U) = U}{=} U^{\perp}$$

$$\text{a) + b) } \Rightarrow M_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} M_{\varphi|U}^{\mathcal{B}} & 0 \\ \hline 0 & M_{\varphi|U^{\perp}}^{\mathcal{B}''} \end{array} \right)$$

Idee: Induktion nach $\dim V$. Finde φ -invar. UR U mit $\dim U = 1$ oder 2 und verwende Induktionsvoraussetzung für U^{\perp} .

§14 Orthogonale Endomorphismen

$$\dim U = 1 \Rightarrow M_{\varphi|U}^{\mathcal{B}'} = (\pm 1) \text{ weil } (\det = \pm 1) \varphi \text{ orth.}$$

$$\dim U = 2 \Rightarrow M_{\varphi|U}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

2. a) $f \in \mathbb{R}[x], \deg f = m.$

$$f(\varphi)(v) = 0, v \neq 0$$

$$\Rightarrow \langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots, \varphi^{m-1}(v) \rangle \text{ ist } \varphi\text{-invariant.}$$

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m, a_m \neq 0$$

$$\Rightarrow \varphi^m(v) = \frac{-1}{a_m} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} a_i \varphi^i(v) \in \langle v, \varphi(v), \dots, \varphi^{m-1}(v) \rangle$$

$$0 = f(\varphi)(v) = a_0v + a_1\varphi(v) + \dots + \underbrace{a_m}_{=0} \cdot \varphi^m(v)$$

b) Sei $\chi_\varphi(x) = f_1(x) \dots f_l(x), f_i \in \mathbb{R}[x]$

$$m = \max\{\deg f_i(x) \mid 1 \leq i \leq l\}$$

$$\Rightarrow \text{es gibt } \varphi\text{-invarianten UR } U \text{ mit } \dim U \leq m$$

$$\text{für } l = 2, d.h. \chi_\varphi(x) = f(x)g(x).$$

Sei $v \in V \setminus \{0\}$ beliebig

$$\text{Cayley-Hamilton: } \chi_\varphi(\varphi) = 0.$$

$$0 = \chi_\varphi(\varphi)(v) = (f \cdot g)(\varphi)(v)$$

$$\Rightarrow = f(\varphi) \circ g(\varphi)(v)$$

$$= f(\varphi)(g(\varphi)(v))$$

$$1. \text{ Fall: } g(\varphi)(v) = 0, v \neq 0, \deg g \leq m$$

$$2. \text{ Fall: } \underbrace{g(\varphi)(v)}_{=v'} \neq 0.$$

$$\Rightarrow f(\varphi)(v') = 0, v' \neq 0, \deg f \leq m.$$

$$\Rightarrow \text{es gibt } \varphi\text{-invarianten UR } U \text{ mit } \dim U \leq m.$$

c) Fundamentalsatz der Algebra $\chi_\varphi(x) = \underbrace{(x - a_1) \dots (x - a_r)}_{r \text{ reelle Nullstellen}} \underbrace{(x - z_1)(x - \bar{z}_1) \dots (x - z_s)(x - \bar{z}_s)}_{s \text{ Paare von komplexen Nullstellen}}$

$$f \in \mathbb{R}[x], f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

$$z \in \mathbb{C}, f(z) = 0$$

$$\Rightarrow f(\bar{z}) = a_0 + a_1\bar{z} + \dots + a_n\bar{z}^n$$

$$= a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$$

$$= \overline{f(z)} = 0$$

$$(\text{Konjugiert komplex } \overline{a + bi} = a - bi)$$

$$(x - z_i)(x - \bar{z}_i) = x^2 - \underbrace{z_i + \bar{z}_i}_{\in \mathbb{R}}x + \underbrace{z_i\bar{z}_i}_{\in \mathbb{R}}$$

$$z_1 = a + bi$$

$$\Rightarrow z_a + z_1$$

$\chi_A(x)$ zerfällt in vollständige Linearfaktoren $\Rightarrow A$ ähnlich zu:

$$\begin{pmatrix}
 \lambda_1 & 1 & & 0 \\
 & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & 1 \\
 0 & & & \lambda_1 \\
 & \lambda_2 & 1 & & 0 \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & \ddots & 1 \\
 & 0 & & & \lambda_2 \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & & & \lambda_r & 1 & & 0 \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & & \ddots & 1 \\
 & & & & & & & & \lambda_r
 \end{pmatrix}$$

Jordan'sche Normalform

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sind die EW von A . A, A^2, A^3, \dots

(4.0.11) (4.24) Beispiel

$n = 3$. $A \in O(3)$. Nach Satz (4.23) ist A ähnlich zu

a) eigentlich orthogonaler Fall:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 \\
 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\
 0 & \sin \alpha & \cos \alpha
 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in [0, 2\pi)$$

„Drehung um α um die e_1 -Achse“

b) uneigentlich orthogonaler Fall:

$$\begin{pmatrix}
 -1 & 0 & 0 \\
 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\
 0 & \sin \alpha & \cos \alpha
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 -1 & 0 & 0 \\
 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\
 0 & \sin \alpha & \cos \alpha
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 \\
 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\
 0 & \sin \alpha & \cos \alpha
 \end{pmatrix}$$

„Spiegelung an der $\langle e_2, e_3 \rangle$ -Ebene“.

Folge aus Bemerkung (4.22), $n = 2$: $\text{Im } \mathbb{Q}^3$ ist

- jede Drehung Produkt von 2 Spiegelungen
- jeder uneigentlich orthogonale Endomorphismus ist Produkt von 3 Spiegelungen

z.B.

$$A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 9 \\ 6 & -7 & -6 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_A = ?$$

§14 Orthogonale Endomorphismen

$A^t A = E_3 \Rightarrow \varphi_A$ ist orthogonal

$\det A = 1 \Rightarrow \varphi_A$ Drehung

$$V(1, A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{Drehachse} \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{Drehachse}$$

Bezüglich der ONB $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right)$ hat φ_A die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 6\sqrt{2} \\ 0 & -6\sqrt{2} & -7 \end{pmatrix}$,

d.h. $\alpha = \arccos(-\frac{7}{11}) \approx 129.5^\circ$.

§15 Symmetrische reelle Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Welche A lassen sich diagonalisieren durch ein $T \in O(n)$? (d.h. $T^{-1}AT$ Diagonalmatrix)
- Gibt es Orthogonalbasen von \mathbb{R}^n aus EV von A ?

(4.0.12) (4.25) Bemerkung

$T \in O(n)$.

a) A symmetrisch $\Rightarrow T^{-1}AT$ symmetrisch.

b) $T^{-1}AT$ Diagonalmatrix $\Rightarrow A$ symmetrisch.

Beweis:

$$\text{a) } (T^{-1}AT)^t = \underbrace{T^t}_{T^{-1}} \underbrace{A^t}_A \underbrace{(T^{-1})^t}_{T^t} = T^{-1}AT.$$

b) $T^{-1}AT = D$ Diagonalmatrix $\Rightarrow A = TDT^{-1} \stackrel{a)}{\Rightarrow} A$ symmetrisch.

(4.0.13) (4.26) Satz

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. $\chi_A(x)$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren $\stackrel{(3.38)}{\Leftrightarrow} A$ ähnlich zu Dreiecksmatrix $\Leftrightarrow A$ diagonalisierbar durch $T \in O(n)$.

Beweis (vgl. 3.38): Sei $\chi_A(x)$ „vollständig zerfallend“ $= (x - c_1) \dots (x - c_n), c_i \in \mathbb{R}$.

„ \Leftarrow “: klar.

„ \Rightarrow “: Sei $v_1 \in \mathbb{R}^n$ normierter EV zu c_1 und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ONB von \mathbb{R}^n . (Gram-Schmidt)

$$T_1 := {}^{\varepsilon}T^{\mathcal{B}} \in O(n) \Rightarrow T_1^{-1}AT_1 \stackrel{T_1 EW}{=} \left(\begin{array}{c|c} c_1 & * \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \stackrel{\text{Bem 4.25}}{=} \left(\begin{array}{c|c} c_1 & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \text{ denn}$$

$$T_1^{-1}AT_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = T^{-1}Av_1 = T^{-1}c_1v_1 = cT^{-1}v_1 = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

wie in (3.38) $\Rightarrow \chi_D(x) = (x - c_2) \dots (x - c_n) \stackrel{\text{Ind. Vorr.}}{\Rightarrow} \text{ex. } S \in O(n-1) : S^{-1}DS \text{ Diagonalmatrix.}$

$$\Rightarrow T \cdot T_1 \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & S \end{array} \right) \in O(n) \Rightarrow T^{-1}AT \text{ Diagonalmatrix. } \square$$

(4.0.14) (4.27) Spektralsatz

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann ist A diagonalisierbar durch $T \in O(n)$.

Beweis: Nach (4.26) ist zu zeigen: $\chi_A(x)$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren (über \mathbb{R})
oder: alle EV von A sind reell.

Sei $\lambda \in \text{EW von } A, v \in V$ zu $\lambda, \lambda \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{C}^n$.

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{C}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}, \quad x_j = a_j + b_j i, a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

$$1. \quad \bar{\lambda} \text{ EW von } A, \bar{v} \text{ EV zu } \bar{\lambda}: A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{(\lambda v)} = (\bar{\lambda} \bar{v}) = \bar{\lambda} \bar{v}.$$

$$2. \quad v^t \bar{v} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \underbrace{x_j \bar{x}_j}_{=a_j^2+b_j^2 \in \mathbb{R} \text{ und } \geq 0} \in \mathbb{R} \text{ und } > 0. (v \neq 0)$$

$$3. \quad \lambda(v^t \bar{v}) = (\lambda v)^t \bar{v} = (Av)^t \bar{v} = v^t A^t \bar{v} = v^t A \bar{v}.$$

$$4. \quad \underbrace{\bar{\lambda}(v^t \bar{v})}_{\in \mathbb{R}_{>0}} = v^t (\lambda \bar{v}) = v^t A \bar{v} = 3.$$

$$\stackrel{3.), 4.)}{\Rightarrow} \lambda = \bar{\lambda}, \text{ d.h. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Anwendung: $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 = 1, a, b, d \in \mathbb{R}$ mit Unbekannten x_1, x_2 .

$$\text{Als Matrixgleichung: } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1$$

bzw. $x^t A x = 1$ (*) mit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ symmetrisch, $x \in \mathbb{R}^2$.

Spektralsatz: es gibt $T \in O(2)$ mit $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Setzt man $x = Ix'$ (Basiswechsel), dann

$$(*) \Leftrightarrow x'^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x' = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 = 1.$$

Dies ist **Ellipsengleichung:**

GRAFIK VON ELLIPSENGLEICHUNG

Satz von der Hauptachsentransformation \Rightarrow Spektralsatz.

Index

Äquivalenzumformungen, 33

ähnlich, 109

Abbildung

allgemeine, 11

Umkehr-, 16

Abbildungsmatrix, 88

Adjunkte, 108

Adjunktenformel, 109

Auswertungshomomorphismus, 61

Basis, 65

geordnete, 70

Standard-, 66

Basistransformationsmatrix, 92

Basiswechsel, 96

Basiswechselmatrix, 92

Begleitmatrix, 128

bijektiv, 74

Bijektivität, 12

Bild, 11, 61

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung, 142

Cayley-Hamilton

Matrix-Inverses, 137

Charakterisierung von Basen, 66

charakteristisches Polynom, 111

Code, 84

Hamming-, 86

Codes, 84

Codewörter, 84

Codierungstheorie, 84

Cramer'sche Regel, 109

Defekt, 73

Determinante, 104

alternierend, 104

normiert, 104

obere/untere Dreiecksmatrix, 107

Determinate

Rechenregeln, 104

Dimension, 67

Eigenraum, 116

Eigenvektor, 116

Eigenwert, 116

k -facher, 118

Einheit, 23

Einheitsmatrix, 47

Einheitsvektor, 66

Einschränkung, 17

Einsetzungshomomorphismus, 117

Element

invers, 21

neutral, 21

Ellipsengleichung, 166

Endomorphismenring, 133

Endomorphismus, 60

Epimorphismus, 74

Epimorphismus, 22, 60

Erzeugendensystem, 65

Erzeugnis

von Untervektorraum, 59

Euklidischer Vektorraum, 141

Faser, 11

Fehler, 85

Fibonacci, 138

Folge, 11

Fundamentalsatz der Algebra, 162

Gauß-Algorithmus, 39

Gauß-Umformungen, 33

Generatormatrix, 84

Google-Algorithmus, 128

Gram-Matrix, 146

Graph, 12

Gruppe, 21

abelsch, 21

linear, 49

symmetrisch, 21

Index

- Gruppenhomomorphismus, 22
- Hamming-Code, 86
- homogen, 30
- Homomorphismus, 60
- Identität, 11
- Infinitesimalrechnung, 62
- inhomogen, 30
- injektiv, 74
- Injektivität, 12
- Invariante Unterräume, 131
- Invertierbarkeit-Orthogonalität, 157
- isomorph, 60
- Isomorphismus, 22, 60
- Jordan'sche Normalform, 163
- Körper, 18
 - \mathbb{F}_2 , 19
- Kern, 61
- Koeffizient, 34
- Koeffizientenmatrix
 - erweiterte, 36
- Koeffizientenmatrix, 35
- Kontrollmatrix, 85
- Koordinaten
 - system, 71
 - vektor, 71
- Länge, 141
- Laplace-Entwicklung, 128
- Leibnitz-Formel, 106
- LGS
 - homogen, 36
 - inhomogen, 36
- linear abhängig (l.a.), 64
- linear unabhängig (l.u.), 64
- Lineare Abbildung, 60
- Lineare Abhängigkeit, 64
- Lineare Gruppe, 49
- Lineare Hülle, 59
- Lineare Unabhängigkeit, 64
- Linearer Code, 84
- Lineares Gleichungssystem, 30
- Linearkombination, 58
- LU/LR-Zerlegung, 98, 99
- Markov
 - Matrix, 129
- Markov-Prozess, 129
- Matrix, 34
 - ähnlich, 109
 - Abbildungs, 88
 - Basistransformations-, 92
 - Basiswechsel-, 92
 - Begleit-, 128
 - Generator-, 84
 - Gram-, 146
 - Inverse, 98, 137
 - Kontroll-, 85
 - Markov-, 129
 - Stochastische, 129
 - symmetrische, 142
- Matrixmultiplikation, 46
- Monomorphismus, 22, 60, 74
- morphismus
 - Auswertungshomo-, 61
 - Endo-, 60
 - Epi-, 60
 - Homo-, 60
 - Iso-, 60
 - Mono-, 60
- multilinear, 104
- n-Tupel, 11
- Norm, 141
- Normalenform einer Ebene, 148
- normiert, 141
- Nullmatrix, 35
- Nullraum, 76
- Nullstelle, 27
- Nullvektor, 57
- orthogonal, 143, 157
- Orthogonalbasis, 150
- Orthogonale Endomorphismen, 157
- orthogonale Gruppe, 158
- orthogonale Projektion, 151
- orthogonales Tupel, 149
- Orthogonalraum, 148, 155
- Orthogonalsystem, 149
- Orthonormalbasis, 150
- orthonormales Tupel, 149
- Orthonormalsystem, 149
- Paar, 11

Index

- Page Rank, 128
- Permutation, 25
- Produkt der Diagonalen, 107
- Projektion
 - orthogonal, 151
- Rang, 73
- Regel von Sarrus, 106
- Ring, 23
- Ringhomomorphismus, 24
- Signum, 25
- Skalar, 57
- Skalarprodukt, 141, 142
- Spaltenraum, 60, 76
- Spaltenvektor, 57
- Spektralsatz, 166
- spezielle orthogonale Gruppe, 160
- Spiegelachse, 159
- Standardskalarprodukt, 141
- surjektiv, 74
- Surjektivität, 12
- Term-Dokumente-Matrix, 145
- Transponieren, 45
- Transposition, 25
- Tripel, 11
- Tupel
 - orthogonal, 149
 - orthonormal, 149
 - Spalten, 35
 - Zeilen, 35
- Umkehrabbildung, 16
- Unterraum, 58
- Untervektorraum, 58
- Urbild, 11
- Vektor, 57
 - Einheits-, 66
 - Koordinaten-, 71
 - Normierung, 143
- Vektorraum, 57
 - Euklidischer, 141
 - triviale, 57
 - Unter- (UVR), 58
- Vielfachheit, 27
- Winkel
 - zwischen Vektoren, 143
- Zeilenraum, 60, 76
- Zeilentransformation
 - elementar, 38
- Zeilenvektor, 57